فـهـرس الإرسـال الـثـانـي

المتتاليات العددية

فهرس السلسلة 1

تتضمن هذه السلسلة درسا واحدا هو :

المتتاليات العددية

المتتاليات العددية

الهدف من الدرس : دراسة تطبيقات خاصّة.

المدة اللاّزمة لدارسته : 10 ساعات.

الدروس التي ينبغي الرّجوع إليها : الدوال والتطبيقات، النهايات، مجموعة الأعداد الطبيعة، البرهان بالتراجع.

المراجع : كتاب الرياضيات 3 ث / ع + ر

المعهد التربوي الوطني.

تصميم الدرس

1 - عموميات على المتتاليات العددية.

2 - المتتاليات الحسابية.

3 - المتتاليات الهندسية.

4 - تمارين التصحيح الذاتي.

5 - الأجوبة.

1- عموميات :

1 - 1 - تعريف :

لتكن المجموعة مج حيث (مج $\subseteq$ ط). نسمي متتالية عددية كل تطبيق تا : مج ← ح

ن ⟼ تا (ن)

أمثلة :

* التطبيق تا : ن ⟼ تا (ن) = ن^2+2ن
هو متتالية عددية معرفة في ط.

* التطبيق تا : ن ⟼ تا(ن) = $\frac{ن}{ن-1}$ هو متتالية عددية معرفة في ط -{1}

*التطبيق تا : ن ⟼ تا(ن) = $\sqrt{4-2ن}$ هو متتالية عددية معرفة في المجموعة { 0 ، 1 ، 2 }.

فإذا أعتبرنا مج =ط فإن :

0 ⟼ تا (0) = ح$_0$

1 ⟼ تا (1) = ح$_1$

2 ⟼ تا (2) = ح$_2$

ن ⟼ تا (ن) = ح$_ن$

تسمى الأعداد الحقيقية ح$_0$ ، ح$_1$ ، ح$_2$ ، . . . . . .، ح$_ن$ ، . . . . حدود المتتالية ويسمى الحد : ح$_ن$ ، الحد العام للمتتالية ويكون عادة تركيبا جبريا بدلالة ن وهو الذي يُعرف المتتالية.

ملاحظة :

نرمز للمتتالية بالرمز $(ح_ن)_{ن \in مج}$ أو $(ح_ن)$ اختصاراً.

1 – 2 – المتتالية المنتهية و غير المنتهية :

 إذا كانت مج مجموعة منتهية تكون $(ح_ن)$ متتالية منتهية.

مثال :

المتتالية العددية التي حدها معرّف كما يلي : $ح_ن = \sqrt{5 - ن}$ هي متتالية منتهية لأن

الحد العام غير معرّف من أجل ن > 5 وبالتالي حدود المتتالية هي : $ح_0$، $ح_1$، $ح_2$، $ح_3$، $ح_4$، $ح_5$ حيث مج = { 0،1،2،3،4،5 }

و هي مجموعة منتهية.

* إذا كانت مج ⊂ ط وَ مج مجموعة غير منتهية تكون ($ح_ن$) متتالية غير منتهية.

مثال : المتتالية العددية التي حدها العام معرّف كما يلي :

∀ ن ∍ ط* : $ح_ن = (-1)^ن$ ، هي متتالية غير منتهية.

1 – 3 – المتتالية التراجعية :

هي كل متتالية ($ح_ن$) يكون فيها : $ح_ن$ = تا ($ح_{ن-1}$) . . . . . . (*).

وهي تعرّف بالإضافة إلى العلاقة (*) بحدها الأول.

مثال : ($ح_ن$) معرفة كما يلي : $\begin{cases} ح_1 = 1 \\ ح_ن = 2ح_{ن-1} + 3 \end{cases}$

لدينا : $ح_2 = 2ح_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$ح_3 = 2ح_2 + 3 = 10 + 3 = 13$

$ح_4 = 2ح_3 + 3 = 26 + 3 = 29$. وهكذا.

1 – 4 – إتجاه تغيرات متتالية عددية :

بما أن كل متتالية عددية هي تطبيق ونعلم أن كل تطبيق دالة فنستطيع أن نطبق عليها خواص الدالة :

 المتتالية الثابتة :

تكون ($ح_ن$) متتالية ثابتة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي ا بحيث :

∀ ن ∍ مج : $ح_ن$ = ا

*** المتتالية المتزايدة :**

تكون ($ح_{ن}$) متتالية متزايدة إذا وفقط إذا كان : $\forall$ ن $\in$ مج : $ح_{ن+1} \geq ح_{ن}$

مثال : ($ح_{ن}$) متتالية عددية معرفة بحدها العام كما يلي : $ح_{ن} = 3ن + 5$

$$\forall \text{ ن } \in \text{ ط } : ح_{ن+1} = 3(ن + 1) + 5 = 3ن + 8$$

$ح_{ن+1} - ح_{ن} = (3ن + 8) - (3ن + 5) = +3$. أي $ح_{ن+1} \geq ح_{ن}$

إذن ($ح_{ن}$) متتالية متزايدة.

*** المتتالية المتناقصة :**

تكون ($ح_{ن}$) متتالية متناقصة إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\forall \text{ ن } \in \text{ مج } : ح_{ن+1} \leq ح_{ن}}$$

مثال : المتتالية المعرّفة من أجل ن $\in$ ط* : $ح_{ن} = \frac{1}{ن}$ هي متتالية متناقصة.

*** المتتالية المحدودة من الأعلى :**

تكون ($ح_{ن}$) متتالية محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α بحيث :

$$\boxed{\forall \text{ ن } \in \text{ مج } : ح_{ن} \leq \alpha}$$

مثال : المتتالية ($ح_{ن}$) التي حدها العام : $ح_{ن} = -3ن + 4$.

محدودة من الأعلى بالعدد 4 لأن :

$\forall$ ن $\in$ ط : $-3ن + 4 \leq 4$.

*** المتتالية المحدودة من الأسفل :**

تكون ($ح_{ن}$) متتالية محدودة من الأسفل إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي β بحيث :

$$\boxed{\forall \text{ ن } \in \text{ مج } : ح_{ن} \geq \beta}$$

مثال 1 : المتتالية ($ح_{ن}$) التي حدها العام : $ح_{ن} = 2ن + 1$.

محدودة من الأسفل بالعدد 1 لأن :

$\forall$ ن $\in$ ط : $2ن + 1 \geq 1$

مثال 2 : المتتالية ($ح_{ن}$) التي حدها العام : $ح_{ن}$ = تجب 5 ن .

محدودة من الأسفل بالعدد -1 و من الأعلى بالعدد 1 لأن :

$\forall$ ن $\in$ ط : $-1 \le$ تجب 5 ن ≤ 1 .

1 – 5 – المتتالية المتقاربة و المتتالية المتباعدة :

- **نهاية متتالية عددية :**

تعريف :

ليكن ل عدد حقيقي و$\left(ح_{ن}\right)$ متتالية عددية، نقول أن $\left(ح_{ن}\right)$ متتالية متقاربة إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$\forall \varepsilon \in ح_{+}^{*}$ ، $\exists$ ن$_0 \in$ مج ، $\forall$ ن $\in$ مج : ن $\rangle$ ن$_0 \Leftarrow \left|ح_{ن} - ل\right| \langle\ \varepsilon$

- نقول عن متتالية (ح$_{ن}$) أنها متقاربة من العدد الحقيقي ل إذا وفقط إذا كانت $\underset{ن \leftarrow +\infty}{\text{نها}}$ ح$_{ن}$ = ل .

مثال : (ح$_{ن}$) متتالية عددية حيث : ح$_{ن} = \dfrac{2ن - 1}{3ن + 5}$

لدينا $\underset{ن \leftarrow +\infty}{\text{نها}}$ ح$_{ن} = \dfrac{2}{3}$. (نهاية محدودة). إذن (ح$_{ن}$) هي متتالية متقاربة.

- **المتتالية المتباعدة :**

تعريف :

إذا كانت (ح$_{ن}$) متتالية غير متقاربة نقول أنها متباعدة أي (إذا كانت $\underset{ن \leftarrow +\infty}{\text{نها}} \left|ح_{ن}\right| = +\infty$ أو ليس للمتتالية نهاية).

مثال :

*ح$_{ن}$ = جب 3 ن ، $\underset{ن \leftarrow +\infty}{\text{نها}}$ ح$_{ن}$ غير موجودة أي ليس للمتتالية نهاية.

* ح$_{ن}$ = -3ن + 7، $\underset{ن \leftarrow +\infty}{\text{نها}}$ ح$_{ن} = -\infty$.إذن (ح$_{ن}$) متتالية متباعدة.

ح$_{ن} = (-1)^{ن}$. المتتالية (ح$_{ن}$) ليس لها نهاية لأن :

$\lim\limits_{ن \to +\infty} ح_ن = +1$. لما ن زوجي .

$\lim\limits_{ن \to +\infty} ح_ن = -1$. لما ن فردي .

نقول أن $(ح_ن)$ متتالية متناوبة.

نظرية 1 :

إذا كانت المتتالية $(ح_ن)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد ب فإنها متقاربة نحو العدد ل حيث ل $\leq$ ب .

مثال : $(ح_ن)$ متتالية عددية حيث : $ح_ن = \frac{4ن + 5}{2ن + 3}$

$$ح_{ن+1} = \frac{4(ن + 1) + 5}{2(ن + 1) + 3} = \frac{4ن + 9}{2ن + 5}$$

لدينا $ح_{ن+1} - ح_ن = \frac{2}{(2ن + 5)(2ن + 3)}$

إذن $ح_{ن+1} - ح_ن > 0$ لأن : $2ن + 5$ وَ $2ن + 3$ موجبان .

ومنه $(ح_ن)$ متتالية متزايدة .

لنبين أن $(ح_ن)$ محدودة من الأعلى .

لدينا $ح_ن = \frac{4ن + 5}{2ن + 3} = 2 - \frac{1}{2ن + 3}$

نلاحظ أن $ح_ن \leq 2$ من أجل كل عدد طبيعي ن .

إذن $(ح_ن)$ محدودة من الأعلى . ومنه $(ح_ن)$ متتالية متقاربة.

نظرية 2 :

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد أ فإنها متقاربة نحو العدد ل حيث ل$\geq$ أ .

مثال : $(ح_ن)$ متتالية عددية حيث $ح_ن = \frac{1}{ن}$.

$\forall$ن $\in$ ط* فإن : $0 \leq \frac{1}{ن}$. إذن المتتالية $(ح_ن)$ محدودة من الأسفل بالعدد صفر، و هي متتالية متناقصة. إذن $(ح_ن)$ متتالية متقاربة نحو عدد ل(مع ل≥ 0)

2 – المتتالية الحسابية :

2 – 1 – تعريف :

نسمي متتالية حسابية كل متتالية عددية يكون فيها :$\forall$ ن $\in$ ط* : $ح_ن = ح_{ن-1} + د$.
حيث د عدد حقيقي ثابت يُدعى أساس المتتالية الحسابية.

مثال 1 :

الأعداد الطبيعية هي حدود متتالية حسابية أساسها د = 1

لاحظ $ح_0 = 0$ ، $ح_1 = ح_0 + 1 = 1$

$ح_2 = 1 + 1 = ح_1 + 1 = 2$ ، $ح_3 = 2 + 1 = ح_2 + 1 = 3$

و هكذا . . .

مثال 2 :

المتتالية $(ح_ن)$ التي حدها العام : $ح_ن = 5 + 3ن$.

لدينا $ح_{ن+1} = 5 + 3 (ن + 1) = (5 + 3ن) + 3 = ح_ن + 3$. نستنتج أن $(ح_ن)$ متتالية حسابية أساسها د = 3 و حدها الأول $ح_0 = 5$.

2 – 2 – إتجاه تغيرات متتالية حسابية :

حسب تعريف المتتالية الحسابية لدينا :

$\forall$ ن $\in$ ط* : $ح_ن = ح_{ن-1} + د$. و منه $ح_ن - ح_{ن-1} = د$.

إذا كان د> 0 تكون المتتالية الحسابية متتالية متزايدة.

إذا كان د< 0 تكون المتتالية الحسابية متتالية متناقصة.

إذا كان د = 0 تكون المتتالية الحسابية متتالية ثابتة.

2 – 3 – حساب الحد العام لمتتالية حسابية :

لتكن ($ح_{ن}$) متتالية حسابية حدها الأول $ح_{1}$ وأساسها د .

حدودها هي : $ح_{1}$، $ح_{2}$ ،. . . . . $ح_{ن}$، . . . . . نستطيع كتابة ما يلي :

$ح_{2}$ = $ح_{1}$ + د

$ح_{3}$ = $ح_{2}$ + د = $ح_{1}$ + 2 د

$ح_{4}$ = $ح_{3}$ + د = $ح_{1}$ + 3 د

نلاحظ أن : $ح_{ن}$ = $ح_{1}$ + (ن – 1) د . و لنبرهن صحة هذه المساواة من أجل كل ن من ط

* بالتراجع .

* هذه المساواة صحيحة من أجل ن = 1 لأن : $ح_{1}$ = $ح_{1}$ + 0 (د) = $ح_{1}$

* نفرض أن المساواة صحيحة من أجل العدد الطبيعي ن = ك أي :

$ح_{ك}$ = $ح_{1}$ + (ك – 1) د

و نبرهن أن المساواة صحيحة من أجل العدد الطبيعي ن = ك + 1 أي :

$ح_{ك+1}$ = $ح_{1}$ + ك . د .

لدينا : $ح_{ك+1}$ = $ح_{ك}$ + د = $ح_{1}$ + (ك – 1) د + د = $ح_{1}$ + ك . د .

إذن المساواة صحيحة من أجل ن = ك + 1 . فهي إذن صحيحة من أجل كل ن من ط* .

ملاحظة 1 :

إذا كان $ح_{0}$ هو الحد الأول للمتتالية الحسابية ($ح_{ن}$) التي أساسها د فإن حدها العام $ح_{ن}$ يُعبر عليه كما يلي :

$$\boxed{ح_{ن} = ح_{0} + ن\ د}$$

و بإمكانية إثبات ذلك بالتراجع.

ملاحظة 2 :

إذا كانت مج =ط ، نجد أن الحد العام للمتتالية الحسابية هو : $ح_{ن}$ = $ح_{0}$ + ن د

إذا كانت مج = ط* ، نجد أن الحد العام للمتتالية هو : $ح_{ن}$ = $ح_{1}$ + (ن – 1) د .

ملاحظة 3 :

إذا كان $ح_{هـ}$ هو الحد الأول للمتتالية الحسابية ($ح_{ن}$) فإن حدها العام هو : $ح_{ن}$ = $ح_{هـ}$ + (ن – هـ) د.

2 – 4 – نهاية متتالية حسابية :

(ح$_{ن}$) متتالية حسابية حدها الأول ح$_{1}$ و أساسها د . نعلم أن : ح$_{ن}$ = ح$_{1}$+ (ن – 1) د .

ومنه فإن نهاية هذه المتتالية تتوقف على إشارة الأساس د .

لدينا نها$_{ن \to +\infty}$ ح$_{ن}$ = نها$_{ن \to +\infty}$ [ح$_{1}$+ (ن – 1) د] = نها$_{ن \to +\infty}$ (ح$_{1}$ – د) + نها$_{ن \to +\infty}$ (ن د)

- إذا كان د > 0 فإن = نها$_{ن \to +\infty}$ ح$_{ن}$ = + ∞
- إذا كان د < 0 فإن = نها$_{ن \to +\infty}$ ح$_{ن}$ = – ∞ .
- إذا كان د = 0 فإن = نها$_{ن \to +\infty}$ ح$_{ن}$ = ح$_{1}$.

الخلاصة : المتتالية الحسابية هي متتالية متباعدة لأن :

نها$_{ن \to +\infty}$ ح$_{ن}$ = + ∞ . إذا كان د > 0 .

نها$_{ن \to +\infty}$ ح$_{ن}$ = – ∞ . إذا كان د < 0 .

2 – 5 – خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية :

إذا كانت ؟ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها د فإن : ب = ؟ + د وَ ب = جـ – د فيكون 2 ب =؟ + جـ

والعكس إذا كانت الأعداد ؟ ، ب ، جـ تحقق : 2 ب = ؟ + جـ فإن جـ = 2 ب – ؟ ومنه جـ = ب + (ب – ؟) إذا وضعنا ب – ؟ = د فإنه يكون : ب = ؟ + د وَ جـ = ب + د .

وهذا يعني أن الأعداد ؟ ، ب ، جـ حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها (ب – ؟) .

إذن :

تكون الأعداد ؟ ، ب ، جـ بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان 2 ب =؟ + جـ .

يُسمى العدد ب الوسط الحسابي للعددين؟ وَ جـ .

2 – 6 – حساب مجموع ن حد الأولى من متتالية حسابية :

لتكن (ح$_{ن}$) متتالية حسابية حدها الأول ح$_{1}$ وأساسها د. لنحسب المجموع مج$_{ن}$ = ح$_{1}$ + ح$_{2}$ + ح$_{3}$ + ... + ح$_{ن}$.

لدينا : ح$_{ن}$ = ح$_{1}$ + (ن – 1) د . و منه :

ح$_{2}$ = ح$_{1}$ + د

$$ح_3 = ح_1 + 2\,د$$

$$ح_4 = ح_1 + 3\,د$$

$$\vdots$$

$$ح_ن = ح_1 + (ن - 1)\,د \,.$$

إذن : $مج_ن = ح_1 + ح_2 + ح_3 + \ldots\ldots + ح_ن$.

$$مج_ن = ح_1 + (ح_1 + د) + (ح_1 + 2\,د) + \ldots + [ح_1 + (ن - 1)\,د] \,. \qquad (1)$$

$$مج_ن = ح_ن + ح_{ن-1} + \ldots\ldots + ح_1 \,.$$

$$مج_ن = ح_ن + (ح_ن - د) + (ح_ن - 2\,د) + \ldots + [ح_ن - (ن - 1)\,د] \,. \qquad (2)$$

بجمع المساواتين (1) و (2) طرف لطرف ينتج :

$$2\,مج_ن = (ح_1 + ح_ن) + (ح_1 + ح_ن) + \ldots + (ح_1 + ح_ن)$$

$2\,مج_ن = ن\,(ح_1 + ح_ن)$. و منه $مج_ن = \frac{ن}{2}\,(ح_1 + ح_ن)$.

وهو مجموع ن حد الأولى من متتالية حسابية حدها الأول $ح_1$ وأساسها د .

● **ملاحظة :**

إذا كان الحد الأول للمتتالية الحسابية هو $ح_0$ فإن مجموع ن حد الأولى منها هو :

$$\boxed{مج_ن = \frac{ن}{2}\,[\,2\,ح_0 + (ن - 1)\,د\,] = \frac{ن}{2}\,[\,ح_0 + ح_{ن-1}\,]}$$

مثال :

لتكن المتتالية $(ح_ن)$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} ح_1 = 2 \\ \text{وَ} \\ ح_ن = ح_{ن-1} + 7 \end{cases}$

أحسب مجموع الحدود الأربعة وعشرون ثم عين الحد العام لهذه المتتالية بدلالة ن

الحل :

نلاحظ أن $ح_ن - ح_{ن-1} = 7$. إذن $(ح_ن)$ متتالية حسابية أساسها د = 7. لدينا

$$مج_ن = \frac{ن}{2}\left[2\,ح_1 + (ن - 1)\,د\right]$$

إذن مج$_{ن}$ = $\frac{24}{2}$ [2 (2) + (24−1) 2] = 12 [4 +46] = 12 (50) = 600.

حساب الحد العام : ح$_{ن}$= ح$_{1}$ + (ن − 1) د = 2 + (ن −1) 7 = 7 ن − 5.

2 − 7 − نتائج :

• لتكن (ح$_{ن}$) متتالية حسابية عدد حدودها فرديا في هذه الحالة نختار عموما الحد الأوسط س فتكون هذه الحدود هي :

.... ، س − 2 د ، س − د ، س ، س + د ، س + 2 د ، ......

حيث د هو الأساس.

مثال : متتالية حسابية تتكون من 5 حدود فإذا علمت أن مجموعها يساوي 15 ومجموع مربعاتها يساوي 65. فما هي هذه الحدود؟

الحل : بما أن عدد الحدود فردي، نختار الحد الأوسط س فتكون الحدود هي :

س − 2 د ، س − د ، س ، س + د ، س + 2 د .

لدينا : (س− 2 د) + (س− د)+س+(س+ د) + (س+ 2 د) = 15 (1)

وَ (س− 2 د)^{2} +(س− د)^{2}+س^{2}+(س+ د)^{2} +(س+ 2 د)^{2} = 65 (2)

من (1) ينتج 5 س = 15 ومنه س = 3 .

نعوض س بقيمتها في (2) فينتج :

(3 − 2د)^{2} + (3 − د)^{2} + 9 + (3 + د)^{2} + (3 + 2د)^{2} = 65

ومنه د^{2} = 2 أي د = $\sqrt{2}$ أو د = $-\sqrt{2}$

• لما د = $\sqrt{2}$ الحدود هي : $3-2\sqrt{2}$ ، $3-\sqrt{2}$ ، 3 ، $3+\sqrt{2}$ ، $3+2\sqrt{2}$

• لما د = $-\sqrt{2}$ الحدود هي : $3+2\sqrt{2}$ ، $3+\sqrt{2}$ ، 3 ، $3-\sqrt{2}$ ، $3-2\sqrt{2}$

لتكن (ح$_{ن}$) متتالية حسابية عدد حدودها زوجيا. في هذه الحالة نختار عموما الحدين الأوسطين هما : س−د وَس + د فتكون حدود المتتالية هي :

.... ، س −3 د ، س − د ، س + د ، س + 3 د ، .....

حيث الأساس هو 2 د.

مثال :

متتالية حسابية منتهية مكونة من 4 حدود إذا علمت أن مجموع هذه الحدود يساوي 16 و مجموع مربعاتها يساوي 84، عيّن هذه الحدود .

الحل : بما أن عدد الحدود زوجي، إذن نختار هذه الحدود كما يلي :

س − 3 د ، س − د ، س + د ، س + 3 د .

لدينا : (س− 3د) + (س−د) +(س+د) + (س+3د) = 16 ....(1)

وَ (س− 3 د)^2 + (س−د)^2 + (س+د)^2 + (س+3د)^2 = 84 ....(2)

من (1) ينتج 4 س = 16 ومنه س = 4 .

نعوض س بقيمتها في (2) ينتج :

(4 − 3د)^2 + (4 −د)^2 +(4+د)^2 + (4+3د)^2 = 84

و منه د^2 = 1 ⇔ د = 1 أو د = −1 .

- لمّا د = 1 المتتالية هي : 1 ، 3 ، 5 ، 7 .
- لمّا د = −1 المتتالية هي : 7 ، 5 ، 3 ، 1 .

3- المتتالية الهندسية :

3 − 1 − تعريف :

نسمي متتالية هندسية كل متتالية عددية يكون فيها :

∀ ن ∋ ط*: ح$_{ن}$ = ح$_{ن−1}$. ر حيث ر عدد حقيقي ثابت يُسمى أساس المتتالية.

مثال 1 :

الأعداد : 4 ، 8 ، 16 ، 32 ، 64 هي حدود متتالية هندسية أساسها ر = 2

مثال 2 :

(ح$_{ن}$) متتالية معرفة بِ : ح$_{ن}$ = 5^{ن} ، ن ∋ ط* .

لدينا : ح$_{ن+1}$ = 5$^{ن+1}$ = 5 . 5^{ن}=5ح^{ن}

إذن (ح$_{ن}$) هي متتالية هندسية أساسها ر = 5 .

3 − 2 − حساب الحد العام لمتتالية هندسية :

(ح$_{ن}$) متتالية هندسية حدها الأول ح$_1$ وأساسها ر غير معدومين .

لدينا :

$ح_2 = ح_1 . ر$

$ح_3 = ح_2 . ر = ح_1 . ر^2$.

$ح_4 = ح_3 . ر = ح_1 . ر^3$.

نـلاحظ أن : $ح_ن = ح_1 . ر^{ن-1}$. لـنبـرهـن صـحـة هذه الـمسـاواة بـالـتـراجـع .

- هـذه الـمسـاواة صـحـيحـة مـن أجل ن = 1 لأن $ح_1 = ح_1 . ر^0 = ح_1$
- نفرض أن المسـاواة صحـيحـة من أجـل العدد طـبيـعي ن = ك أي :

$ح_ك = ح_1 . ر^{ك-1}$.

ونُـبـرهـن أن الـمسـاواة صـحـيحـة مـن أجـل ن = ك + 1 أي :

$ح_{ك+1} = ح_1 . ر^ك$.

لـديـنـا $ح_{ك+1} = ح_ك . ر = ح_1 . ر^{ك-1} . ر = ح_1 . ر^ك$.

إذن الـمسـاواة $ح_ن = ح_1 . ر^{ن-1}$ صـحـيحـة من أجـل ن = ك + 1 ، فـهـي صـحـيحـة مـن أجـل كـل ن مـن ط* .

مـلاحـظـة :

إذا كـان $ح_0$ هـو الـحد الأول لـلمـتـتـالـيـة الـهـنـدسـيـة ($ح_ن$) الـتـي أسـاسـهـا ر فـإن حـدّهـا الـعـام $ح_ن$ يُـعبـر عنـه بـدلالـة $ح_0$ وَ ر كـمـا يـلـي :

$$\boxed{ح_ن = ح_0 . ر^ن}$$

بـإمـكـانـك إثـبـات ذلـك بـالـتـراجـع .

3 – 3 – إتـجـاه تـغـيـرات مـتـتـالـيـة هـنـدسـيـة :

($ح_ن$) مـتـتـالـيـة هـنـدسـيـة حـدهـا الأول $ح_1$ وأسـاسـهـا ر غـيـر مـعـدومـيـن .

لـدراسـة تـغـيـرات الـمـتـتـالـيـة الـهـنـدسـيـة ($ح_ن$) نـدرس إشـارة الـفـرق : $ح_ن - ح_{ن-1}$

$ح_ن - ح_{ن-1} = ح_1 . ر^{ن-1} - ح_1 . ر^{ن-2} = ح_1 ر^{ن-2} (ر - 1)$.

نلاحـظ أن إشـارة هذا الفرق $ح_ن - ح_{ن-1}$ تتوقف على إشارة $ح_1$ وَ $ر^{ن-2}$ (ر−1).

- إذا كـان ر = 1 فـإن الـمـتـتـالـيـة ($ح_ن$) تـكـون ثـابـتـة.

• إذا كان ر < 0 فإن المتتالية $(ح_ن)$ تكون غير رتيبة.

لأن إشارة الفرق $ح_ن - ح_{ن-1}$ تكون تارة موجبة و تارة سالبة.

• إذا كان ر> 0 فإن إشارة الفرق تتوقف على إشارة $ح_1$ وَ (ر−1) .

- إذا كان $ح_1$ > 0 وَ 0 < ر < 1 فإن المتتالية متناقصة .
- إذا كان $ح_1$ < 0 وَ 0 < ر < 1 فإن المتتالية متزايدة .
- إذا كان $ح_1$ > 0 وَ ر > 1 فإن المتتالية متزايدة .
- إذا كان $ح_1$ < 0 وَ ر > 1 فإن المتتالية متناقصة .

3 – 4 – خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية :

إذا كانت الأعداد غير المعدومة أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متعاقبة من متتاللية هندسية أساسها ر . فإن :

ب =أ . ر ، جـ = ر . ب ،ر^2 . أ و منه أ جـ = ب^2 .

والعكس إذا كانت الأعداد غير المعدومة أ ، ب ، جـ تحقق أ جـ = ب^2 فإن :

جـ = $\frac{ب^2}{أ}$ ومنه جـ = ب . $\frac{ب}{أ}$ إذا وضعنا $\frac{ب}{أ}$ = ر .

فإنه يكون : ب = ر.أ وَ جـ = ب.ر .

وهذا يعني أن الأعداد أ ، ب ، جـ حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $\frac{ر}{أ}$ إذن :

تكون الأعداد غير المعدومة أ ، ب ، جـ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان : ب^2 = أ . جـ . يُسمى العدد ب الوسط الهندسي للعددين أ وَ جـ .

3 – 5 – حساب مجموع ن حد الأولى من متتالية هندسية :

$(ح_ن)$ متتالية هندسية حدّها الأول $ح_1$ وأساسها ر.

نسمي $مج_ن$ مجموع ن حد الأولى من هذه المتتالية :

لدينا : $مج_ن$ = $ح_1$ + $ح_2$ + ... + $ح_ن$.

لدينا : $مج_ن$ = $ح_1$ + $ح_1$. ر + $ح_1$. ر^2 + $ح_1$. ر^3 +...+ $ح_1$. ر$^{ن-1}$ (1)

نضرب طرفي المساواة (1) في ر (ر ≠ 0).

ر $مج_ن$ = $ح_1$.ر + $ح_1$.ر^2 + $ح_1$.ر^3 + $ح_1$.ر^4 +...+ $ح_1$. ر^ن (2)

لنحسب الفرق ر مج$_{ن}$ − مج$_{ن}$.

ر مج$_{ن}$ − مج$_{ن}$ = (ح$_1$.ر+ح$_1$.ر^2 +......+ح$_1$.ر^{ن}) − (ح$_1$+ح$_1$.ر+ح$_1$.ر^2+....+ح$_1$. ر$^{ن-1}$)

ينتج أن :   ر مج$_{ن}$ − مج$_{ن}$ = ح$_1$ ر^{ن} − ح$_1$

مج$_{ن}$ (ر − 1) = ح$_1$ (ر^{ن} − 1)

- إذا كان ر ≠ 1 فإن

$$\boxed{مج_{ن} = \frac{ح_1\left(ر^{ن}-1\right)}{ر-1}}$$

حيث مج$_{ن}$ هو المجموع وَ ح$_1$ الحد الأول وَ ر الأساس .

- إذا كان ر = 1 فإن مج$_{ن}$ = ن ح$_1$.

ملاحظة : إذا كان الحد الأول هو ح$_0$ فإن :

$$\boxed{مج_{ن} = \frac{ح_0\left(ر^{ن}-1\right)}{ر-1}}$$

3 – 6 – نهاية متتالية هندسية :

(ح$_{ن}$) متتالية هندسية حيث ح$_{ن}$ = ح$_1$. ر$^{ن-1}$ وَ ح$_1$ ≠ 0 .

- إذا كان ر > 1 فإن $\underset{ن\to+\infty}{نها}$ ح$_1$.ر$^{ن-1}$ = +∞ إذا كان ح$_1$ > 0 .

و $\underset{ن\to+\infty}{نها}$ ح$_1$.ر$^{ن-1}$ = −∞ إذا كان ح$_1$ < 0 .

لأن $\underset{ن\to+\infty}{نها}$ ر^{ن} = +∞ .

- إذا كان ر =1 يكون ح$_{ن}$ = ح$_1$ ومنه = $\underset{ن\to+\infty}{نها}$ ح$_{ن}$ = ح$_1$.

- إذا كان 0 < ر < 1 نضع ر = $\frac{1}{رَ}$ ، $\underset{ن\to+\infty}{نها}$ رَ^{ن} = + ∞ .

ومنه $\lim\limits_{ن \to +\infty} ر^{ن} = \lim\limits_{ن \to +\infty} \frac{1}{(\bar{ر})^{ن}} = 0$ ، إذن $\lim\limits_{ن \to +\infty} ح_1 . ر^{ن-1} = 0$

- إذا كان $-1 < ر < 0$ لدينا في هذه الحالة $0 < |ر| < 1$ ومنه $\lim\limits_{ن \to +\infty} |ر^{ن}| = 0$.
- إذا كان $ر \leq -1$ المتتالية لا تقبل نهاية لأن حدودها لا تحتفظ بإشارة ثابتة.

3 – 7 – نتائج :

- لتكن $(ح_{ن})$ متتالية هندسية عدد حدودها فرديا في هذه الحالة نختار عموما الحد الأوسط س فتكون الحدود هي : .... ، $\frac{س}{ر^2}$ ، $\frac{س}{ر}$ ، س، س ر ، س $ر^2$ ، ....

حيث ر هو الأساس (ر $\neq$ 0).

مثال :

متتالية هندسية عدد حدودها 3 حيث مجموع هذه الحدود يساوي 36.75 وجداؤها يساوي 343. أوجد هذه الحدود.

الحل :

بما أن عدد الحدود فردي فإننا نختار هذه الحدود كما يلي : $\frac{س}{ر}$ ، س ، س ر .

و لدينا $\frac{س}{ر} + س + س\,ر = 36,75$ .... (1)

$\frac{س}{ر} . س . س\,ر = 343$ .... (2)

من (2) يُنتج $س^3 = 343$ أي س = 7

ومنه : $\frac{7}{ر} + 7 + 7\,ر = 36,75 \Leftrightarrow 7\,ر^2 - 9,752\,ر + 7 = 0$.

لدينا : Δ =25 6,2 ومنه نجد ر = 4 أو ر = $\frac{1}{4}$.

لما ر = 4 المتتالية هي : $\frac{7}{4}$ ، 7 ، 28 .

لما ر = $\frac{1}{4}$ المتتالية هي : 28 ، 7 ، $\frac{7}{4}$.

• لتكن $(ح_ن)$ متتالية هندسية عدد حدودها زوجيا في هذه الحالة نختار عموماً الحدين الأوسطين $\frac{س}{ر}$ ، س ر وتكون الحدود هي : .... ، $\frac{س}{ر^3}$، $\frac{س}{ر}$ ، س ر ، س $ر^3$ ،

4- تمارين التصحيح الذاتي :

4 - 1 - $(ح_ن)$ متتالية عددية معرفة كما يلي : ∀ ن ∋ ط : $ح_ن$ = $\frac{2ن + 1}{ن + 1}$

1 - أحسب : $ح_0$ ، $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ، $ح_4$.

2 - بين أن المتتالية $(ح_ن)$ متزايدة .

3 - أوجد $\lim_{ن \to +\infty}$ $ح_ن$.

4 - 2 - $(ح_ن)$ متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} ح_0 = 2 \\ \forall ن \in ط : 2\ ح_{ن+1} = ح_ن + 1 \end{cases}$$

$(ي_ن)$ متتالية عددية معرفة كما يلي : ∀ ن ∋ ط : $ي_ن$ = $ح_ن - 1$.

1 - بيّن أن $(ي_ن)$ متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها.

2 - أحسب $ي_ن$ بدلالة ن ثم استنتج $ح_ن$، ما هي نهاية $ح_ن$ عندما ن يؤول إلى + ∞ ؟

3 - أحسب المجموع : $م_ن$ = $ح_0 + ح_1 + ...ح_ن$.

5 – أجوبة التصحيح الذاتي :

5 – 1 – باستعمال عبارة الحد العام نجد أن :

$$ح_0 = \frac{(2\times 0)-1}{0+1} = -1 \text{ ، } ح_1 = \frac{(2\times 1)-1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ ، } ح_2 = \frac{(2\times 2)-1}{2+1} = 1$$

$$ح_3 = \frac{(2\times 3)-1}{3+1} = \frac{5}{4} \text{ ، } ح_4 = \frac{(2\times 4)-1}{4+1} = \frac{7}{5} .$$

2 – مهما يكن العدد الطبيعي ن لدينا :

$$ح_{ن+1} - ح_{ن} = \frac{2\times(ن+1)-1}{(ن+1)+1} - \frac{2ن-1}{ن+1} = \frac{3}{(ن+1)(ن+2)}$$

وبما أن : $\frac{3}{(ن+1)(ن+2)} > 0$ فإن المتتالية $(ح_ن)$ متزايدة .

3 – عندما يؤول ن إلى + ∞ لدينا : (2 ن – 1) يؤول إلى + ∞ وَ (ن + 1) يؤول إلى + ∞
و هذه إحدى حالات عدم التعيين.

إذن : $\lim_{ن\to+\infty} \frac{2ن-1}{ن+1} = \lim_{ن\to+\infty} \frac{2ن}{ن} = 2$.

5 – 2 –

1 – لدينا من أجل كل عدد طبيعي ن :

$$ي_{ن+1} = ح_{ن+1} - 1 = \frac{1}{2}(ح_ن + 1) - 1 = \frac{1}{2}(ح_ن - 1) = \frac{1}{2} ي_ن$$

إذن $(ي_ن)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$ي_0 = ح_0 - 1 = 1$$

2 – بما أن $(ي_ن)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. وحدها الأول $ي_0 = 1$

فإن : $ي_ن = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{ن} = \left(\frac{1}{2}\right)^{ن}$

ومنه $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ي}_{\text{ن}} + 1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}}$

$\underset{\text{ن} \to +\infty}{\text{نها}} \text{ح}_{\text{ن}} = \underset{\text{ن} \to +\infty}{\text{نها}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}}\right] = 1$. (لأن $\underset{\text{ن} \to +\infty}{\text{نها}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}} = 0$)

3 – لنحسب المجموع $\text{م}_{\text{ن}} = \text{ح}_0 + \text{ح}_1 + \ldots\ldots \text{ح}_{\text{ن}}$.

$$\text{م}_{\text{ن}} = 1 + \left(\frac{1}{2} + 1\right) + \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \ldots. + \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}}\right]$$

$$\text{م}_{\text{ن}} = (\text{ن} + 1) + \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}}\right]$$

$$\text{م}_{\text{ن}} = (\text{ن} + 1) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) = 1 + \text{ن} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}}$$

$$\text{م}_{\text{ن}} = 2 + \text{ن} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ن}}$$

فهرس السلسلة 2

تتضمن هذه السلسلة درسا واحدا هو :

دراسة نماذج من الدوال

دراسة نماذج من الدوال

I – الدوال الناطقة :

1) – الدالة التناظرية :

1) – تا : س ⟵ $\frac{2س-1}{3س-5}$

2) – تا : س ⟵ $\frac{س^2-8س+16}{س-3}$

3) – تا : س ⟵ $\frac{3س^2-12س+10}{س^2-4س+3}$

4) – تا : س ⟵ $\frac{س^2+7س+7}{س^2+2س+2}$

II – الدالة التي تشمل قيما مطلقة :

تا : س ⟵ $\frac{س^2+|2س-1|}{س}$

III – الدالة الصماء :

تا : س ⟵ س + $\sqrt{\frac{س-1}{س+1}}$

IV– الدوال الدورية :

1) – تا : س ⟵ تجب^{2}س . جب2س

2) – تا : س ⟵ $\frac{تجب2س}{تجب س}$ . .

3) – تا : س ⟵ س – جب س .

I- الدوال الناطقة :

1 – الدالة تا حيث تا (س) = $\frac{أ س+ب}{\overleftarrow{أ} س+\overleftarrow{ب}}$ حيث أ ≠ 0 و أ← ≠0.

تسمى تا دالة تناظرية.

مثال :

أدرس تغيرات الدالة تا حيث تا (س) = $\frac{2س - 1}{3س - 5}$ وأنشئ المنحنى البياني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(م ، \vec{و} ، \vec{ي}\right)$

الحل :

1 – مجموعة التعريف : 3 س – 5 = 0 ⇔ س = $\frac{5}{3}$.

من أجل كل عدد حقيقي س يختلف عن $\frac{5}{3}$ يمكن حساب العدد الحقيقي $\frac{2س - 1}{3س - 5}$.

إذن مجموعة التعريف هي : ف =] – ∞ ، $\frac{5}{3}$ [∪] $\frac{5}{3}$ ، + ∞ [

المستقيم الذي معادلته س = $\frac{5}{3}$ مستقيم مقارب لمنحنى الدالة تا.

2 – **النهايات** : حسب خواص النهايات لدينا :

$$\underset{س \to -\infty}{نها} (2س - 1) = -\infty \quad وَ \quad \underset{س \to -\infty}{نها} (3س - 5) = -\infty$$

إذن هناك حالة عدم التعيين.

لإزالة حالة عد التعيين نتبع الخطوات التالية :

$$\underset{س \to -\infty}{نها} تا\left(س\right) = \underset{س \to -\infty}{نها} \left[\frac{س\left(2 - \frac{1}{س}\right)}{س\left(3 - \frac{5}{س}\right)}\right] = \underset{س \to -\infty}{نها} \left(\frac{2 - \frac{1}{س}}{3 - \frac{5}{س}}\right) = \frac{2}{3}$$

لأن $\frac{1}{س}$ ← 0 لمّا س ← – ∞ وَ $\frac{5}{س}$ ← 0 لمّا س ← – ∞ .

وبالمثل : $\underset{س \to +\infty}{نها} تا(س) = \frac{2}{3}$.

فالمستقيم الذي معادلته ع = $\frac{2}{3}$ مستقيم مقارب لمنحني الدالة تا.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{س \to \frac{5}{3}^{>}}{\text{نـهـا}} (2س - 1) = \frac{7}{3} \\ \text{وَ} \\ \underset{س \to \frac{5}{3}^{>}}{\text{نـهـا}} (3س - 5) = 0^{+} \end{array}\right\} \quad \text{لأن} \quad \underset{س \to \frac{5}{3}^{>}}{\text{نـهـا}} \; \text{تـا}(س) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{س \to \frac{5}{3}^{<}}{\text{نـهـا}} (2س - 1) = \frac{7}{3} \\ \text{وَ} \\ \underset{س \to \frac{5}{3}^{<}}{\text{نـهـا}} (3س - 5) = 0^{-} \end{array}\right\} : \quad \text{لأن} \quad \underset{س \to \frac{5}{3}^{<}}{\text{نـهـا}} \; \text{تـا}(س) = -\infty$$

3 - إتـجـاه الـتـغـيـرات :

*** الـمـشـتـق :**

$\forall$س $\in$ ح $- \left\{\frac{5}{3}\right\}$: $\text{تاَ}(س) = \frac{(2س-1)'(3س-5) - (2س-1)(3س-5)'}{(3س-5)^{2}}$

$$\text{تـاَ}(س) = \frac{2(3س-5) - 3(2س-1)}{(3س-5)^{2}} = \frac{-7}{(3س-5)^{2}}$$

ومـنـه $\forall$س $\in$ ف : $\text{تاَ}(س) = \frac{-7}{(3س-5)^{2}}$

$\forall$ س $\in$ ف ، تـاَ (س) < 0 ومـنـه الـدالـة تـا مـتـنـاقـصـة تمـامـا عـلـى كـل مـن الـمـجـالـيـن : $]-\infty ، \frac{5}{3}[$ وَ $]\frac{5}{3} ، +\infty[$.

4 – جدول الـتـغـيـرات :

س	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
تـاَ(س)		−	$\Vert$	−	
تغيـرات تـا	$\frac{2}{3}$	↘	$-\infty \Vert +\infty$	↘	$\frac{2}{3}$

5 – تعيـين نقـاط تقـاطـع المنحني مع حـاملـي محـاوريـن :

• نـقـاط تـقـاطـع الـمـنـحـنـي مـع حـامـل مـحـور الـفـواصـل : لأجـل ذلـك نـضـع : ع = 0.

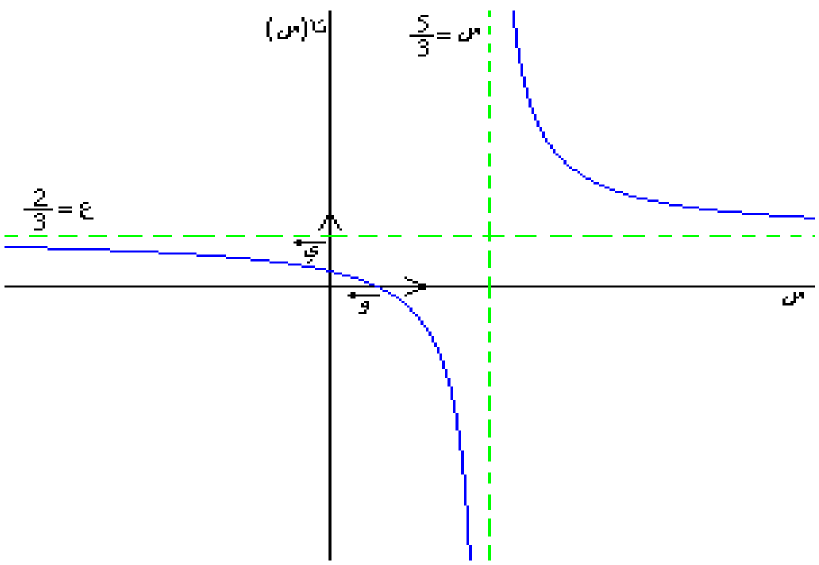
ع = 0 $\Leftrightarrow$ 2 س − 1 = 0 $\Leftrightarrow$ س = $\frac{1}{2}$.

فـالـمـنـحـنـى يـقـطـع حـامـل مـحـور الـفـواصـل فـي الـنـقـطـة ($\frac{1}{2}$ ، 0).

• نـقـاط تـقـاطـع الـمـنـحـنـي مـع حـامـل مـحـور الـتـراتـيـب : لأجـل ذلـك نـضـع س = 0

س = 0 ، تـا(0) = $\frac{1}{5}$ أي أن مـنـحـنــي الـدالـة تـا يـقـطـع حـامـل مـحـور الـتـراتـيـب فـي الـنـقـطـة (0 ، $\frac{1}{5}$).

6 – رسـم الـمـنـحـنـى :



2 – الدالـة تـا حيـث تـا(س) = $\dfrac{\text{أس}^2 + \text{ب س} + \text{جـ}}{\overleftarrow{\text{أس}} + \text{بَ}}$ حيث أ ≠ 0 و َ أ ≠ 0 .

مـثـال :

أدرس تـغـيـرات الـدالـة تـا حـيـث تـا(س) = $\dfrac{\text{س}^2 - 8\text{س} + 6}{\text{س} - 3}$

وأنـشـئ الـمـنـحـنـى الـبـيـانـي لـهـا فـي الـمـسـتـوي الـمـنـسـوب إلـى مـعـلـم مـتـعـامـد و مـتـجـانـس $(\text{م}، \vec{\text{و}}، \vec{\text{ي}})$.

الـحـل :

1 – <u>**مـجـمـوعـة الـتـعـريـف :**</u>

س – 3 = 0 ⟺ س = 3 . مـن أجـل كـل عـدد حـقـيـقـي س يـخـتـلـف عـن 3 يـمـكـن حـسـاب الـعـدد الـحـقـيـقـي $\dfrac{\text{س}^2 - 8\text{س} + 6}{\text{س} - 3}$. إذن مجموعة الـتعريف هي : ف = $]-\infty ، 3[\cup]3 ، +\infty[$

الـمـسـتـقـيـم الـذي مـعـادلـتـه : س = 3 مـسـتـقـيـم مـقـارب لـمـنـحـنـي الـدالـة تـا

2 – <u>**الـنـهـايـات :**</u>

لديـنـا $\lim\limits_{\text{س} \to -\infty} \left(\text{س}^2 - 8\text{س} + 16\right) = +\infty$ و َ $\lim\limits_{\text{س} \to -\infty} (\text{س} - 3) = -\infty$

إذن هـنـاك حـالـة عـدم الـتـعـيـيـن لإزالـة حـالـة عـدم الـتـعـيـيـن هـذه نـتـبـع الـخـطـوات الـتـالـيـة :

$$\lim_{\text{س} \to -\infty} \text{تا}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to -\infty} \left[\frac{\text{س}^2 \left(1 - \frac{8}{\text{س}} + \frac{16}{\text{س}^2}\right)}{\text{س}\left(1 - \frac{3}{\text{س}}\right)} \right] = \lim_{\text{س} \to -\infty} \frac{\text{س}^2}{\text{س}} = -\infty$$

$\lim\limits_{\text{س} \to +\infty} \text{تا}(\text{س}) = +\infty$ (نـتـبـع نـفـس الـطـريـقـة)

نـبـحـث عـن الـخـطـوط الـمـقـاربـة الـمـائـلـة :

$$\lim_{\substack{س \to 3 \\ >}} تا(س) = +\infty \text{ لأن } \begin{cases} \lim_{\substack{س \to 3 \\ >}} \left(س^2 - 8س + 16\right) = 1 \\ \lim_{\substack{س \to 3 \\ >}} (س - 3) = 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{س \to 3 \\ <}} تا(س) = -\infty \text{ لأن } \begin{cases} \lim_{\substack{س \to 3 \\ <}} \left(س^2 - 8س + 16\right) = 1 \\ \lim_{\substack{س \to 3 \\ <}} (س - 3) = 0^- \end{cases}$$

نبحث عن الخطوات المقاربة المائلة :

$$ا = \lim_{|س| \to +\infty} \frac{تا(س)}{س} = \lim_{|س| \to +\infty} \left[\frac{س^2\left(1 - \frac{8}{س} + \frac{16}{س}\right)}{س^2\left(1 - \frac{3}{س}\right)} \right] = 1 \quad \text{إذن } ا = 1$$

$$\lim_{|س| \to +\infty} \left[تا(س) - ا\,س \right] = \lim_{|س| \to +\infty} \left[\frac{س^2 - 8س + 16}{س - 3} - س \right]$$

$$= \lim_{|س| \to +\infty} \left(\frac{-5س + 16}{س - 3} \right) = -5$$

إذن معادلة المستقيم المقارب هي : ع = س − 5 .

3 − إتجاه التغيرات :

• المشتق :من أجل كل حقيقي س من ح − {3} لدينا :

$$تاَ(س) = \frac{\left(س^2 - 8س + 16\right)'(س - 3) - (س - 3)'\left(س^2 - 8س + 16\right)}{(س - 3)^2}$$

و منه $تاَ(س) = \frac{س^2 - 6س + 8}{(س - 3)^2}$

واضح أنه من أجل كل س من ف : $(س - 3)^2 > 0$.

• تاَ(س) = 0 ⟺ $س^2$ − 6 س + 8 = 0 ⟺ س = 2 أو س = 4 .

مـن أجـل س = 2 ، تــا(2) = −4 و من أجل س = 4 ، تـا(4) = 0 يكون للـمنـحنـي مـماسـان عند الـنقطـتيـن المعـرفتيـن بـ : (2 ، −4) وَ (4 ، 0) يـوازيان مـحـور الـفـواصـل.

- تـاَ(س) > 0 ⇔ س < 2 أو س > 4 . الـدالـة تـا مـتـزايـدة تـمـامـا عـلـى الـمـجـال] − ∞ ، 2 [و علـى] 4 ، + ∞ [.
- تـاَ(س) < 0 ⇔ 2 < س < 4 . الـدالـة تـا مـتـنـاقـصـة تـمـامـا عـلـى الـمـجـال] 2 ، 4 [.

4 − جـدول الـتـغـيـرات :

س	−∞		2		3		4		+∞
تـاَ(س)		+	0	−	‖	−	0	+	
تـا	−∞	↗	−4	↘ −∞	‖	+∞ ↘	0	↗	+∞

5 − تـعـيـيـن نـقـاط تـقـاطـع الـمـنـحـنـي مـع حـامـلـي الـمـحـوريـن :

- نـقـاط تـقـاطـع الـمـنـحـنـي مـع حـامـل مـحـور الـفـواصـل : لأجـل ذلـك نـضـع ع = 0

$$\text{ع} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 8\text{س} + 16}{\text{س} - 3} = 0 \\ \text{وَ} \\ \text{س} - 3 \neq 0 \end{cases}$$

ومـنـه : $\text{س}^2 - 8\,\text{س} + 16 = 0 \Leftrightarrow (\text{س} - 4)(\text{س} - 4) = 0 \Leftrightarrow \text{س} = 4$.

أي أن مـنـحـنـي الـدالـة تـا يـقـطـع حـامـل مـحـور الـفـواصـل فـي الـنـقـطـة الـمـعـيـنـة بِـ : (4 ، 0)

- نـقـاط تـقـاطـع الـمـنـحـنـي مـع حـامـل مـحـور الـتـراتـيـب : لأجـل ذلـك نـضـع س = 0 .

س = 0 ، تــا(0) = $\dfrac{16}{3}$ أي أن مـنـحـنـي الـدالـة تـا يـقـطـع حـامـل مـحـور الـتـراتـيـب فـي الـنـقـطـة الـمـعـيـنـة بـ : (0 ، $\dfrac{16}{3}$).

- دراسـة وضـع الـمـنـحـنـي بـالـنـسـبـة لـلـخـط الـمـقـارب الـمـائـل ذي الـمـعـادلـة ع = س − 5 .

$$\text{تا}(\text{س}) - \text{ع} = \frac{\text{س}^2 - 8\text{س} + 16}{\text{س} - 3} - (\text{س} - 5) = \frac{\left(\text{س}^2 - 8\text{س} + 16\right) - (\text{س} - 5)(\text{س} - 3)}{\text{س} - 3}$$

$$\text{تا}(\text{س}) - \text{ع} = \frac{1}{\text{س} - 3}$$

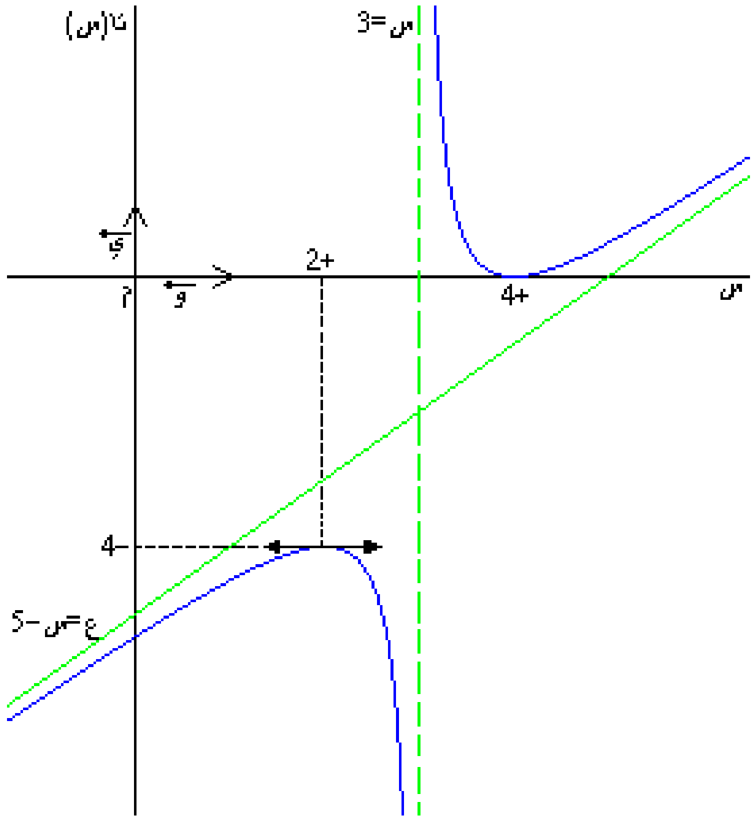
من أجل س > 3 يكون س − 3 > 0 و بالتالي تا(س) − ع > 0.

فالمنحني في هذه الحالة يقع فوق الخط المقارب المائل.

ومن أجل س < 3 يكون س − 3 < 0 وبالتالي تا(س) − ع < 0.

أي أن المنحني في هذه الحالة يقع تحت الخط المقارب المائل.

6 − رسم المنحني :



3 − الدالة تا حيث تا(س) = $\dfrac{\text{أس}^2 + \text{ب س} + \text{جـ}}{\text{أَس}^2 + \text{بَ} + \text{جَ}}$ حيث أ ≠ 0 وَ أَ ≠ 0

مثـال :

أدرس تـغيـرات الدالـة تـا حيـث $تا(س) = \frac{3س^2 - 12س + 10}{س^2 - 4س + 3}$

وانشــئ الـمنـحـنـى الـبيـانــي لـهــا فــي الـمسـتـوي الـمنـسـوب إلى مـعـلـم مـتـعـامـد ومـتـجـانـس $(م، \vec{و}، \vec{ي})$ **الحـل :**

1 – مجموعـة التعريف :

$س^2 - 4س + 3 = 0 \Leftrightarrow (س-1)(س-3) = 0$ س = 1 أو س = 3.

ومنـه ف = $]-\infty، 1[\cup]1، 3[\cup]3، +\infty[$.

المـسـتقيم الـذي مـعادلـتـه س = 1 هـو خـط مـقـارب لـمـنـحـنـي الـدالـة تـا وكـذلـك الـمـسـتـقيـم الـذي مـعـادلـتـه س = 3 .

2 – النـهـايـات :

$\lim_{س \to -\infty} (3س^2 - 12س + 10) = +\infty$ وَ $\lim_{س \to -\infty} (س^2 - 4س + 3) = +\infty$

وبـالـتـالـي هنـاك حـالـة عدم التـعيين. لإزالـة عدم الـتـعيين نـتّبـع الـخطـوات الـتـالـيـة :

$$\lim_{س \to -\infty} تا(س) = \lim_{س \to -\infty} \frac{س^2\left(3 - \frac{12}{س} + \frac{10}{س^2}\right)}{س^2\left(1 - \frac{4}{س} + \frac{3}{س^2}\right)} = 3$$

بـنفس الـطـريـقـة نـجـد $\lim_{س \to +\infty} تا(س) = 3$.

المـستقيم الذي مـعـادلـتـه ع = 3 هو خط مقـارب لـمـنـحـنـي الـدالـة تـا.

$\lim_{\substack{س \to 1 \\ >}} تا(س) = -\infty$ لأن $\begin{cases} \lim_{\substack{س \to 1 \\ >}} (3س^2 - 12س + 10) = 1 \\ \lim_{\substack{س \to 1 \\ >}} (س^2 - 4س + 3) = 0^- \end{cases}$

$\lim_{\substack{س \to 1 \\ <}} تا(س) = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim_{\substack{س \to 1 \\ <}} (3س^2 - 12س + 10) = 1 \\ \lim_{\substack{س \to 1 \\ <}} (س^2 - 4س + 3) = 0^+ \end{cases}$

$$\underset{س \to 3}{\text{نها}} \; \text{تا}(س) = +\infty \quad \text{لأن} \quad \begin{cases} \underset{س \to 3}{\text{نها}} \left(3س^{2} - 12س + 10\right) = 1 \\ \underset{س \to 3}{\text{نها}} \left(س^{2} - 4س + 3\right) = 0^{+} \end{cases}$$

$$\underset{س \to 3}{\text{نها}} \; \text{تا}(س) = -\infty \quad \text{لأن} \quad \begin{cases} \underset{س \to 3}{\text{نها}} \left(3س^{2} - 12س + 10\right) = 1 \\ \underset{س \to 3}{\text{نها}} \left(س^{2} - 4س + 3\right) = 0^{-} \end{cases}$$

<u>3 – إتجاه التغيرات :</u>

• المشتق : من أجل كل عنصر س من ح − {1 ، 3 } لدينا :

$$\text{تا}'(س) = \frac{\left(3س^{2} - 12س + 10\right)'\left(س^{2} - 4س + 3\right) - \left(س^{2} - 4س + 3\right)'\left(3س^{2} - 12س + 10\right)}{\left(س^{2} - 4س + 3\right)^{2}}$$

$$\text{تا}'(س) = \frac{-2\left(س - 2\right)}{\left(س^{2} - 4س + 3\right)^{2}}$$

• تاَ(س) = 0 ⇔ −2 (س − 2) = 0 ⇔ س = 2.

من أجل س = 2 ، تا(2) = 2 يكون المماس للمنحني في النقطة المعرفة بِ (2 ، 2) موازيا لحامل محور الفواصل.

• تاَ(س) > 0 ⇔ س ∋] − ∞ ، 1 [∪] 1 ، 2 [. الدالة تا متزايدة تماما على كل من المجالين] − ∞ ، 1 [∪] 1 ، 2 [.

• تاَ(س) < 0 ⇔ س ∋] 2 ، 3 [∪] 3 ، +∞ [. الدالة تا متناقصة تماما.

على كل من المجالين] 2 ، 3 [و] 3 ، +∞ [

4 – جدول التغيرات :

س	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
تاَ(س)		+	‖	+	0	−	‖	+	
تا	3	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3

5 – تعيين نقاط تقاطع المنحني مع حاملي المحورين :

• نقاط تقاطع المنحني مع حامل محور الفواصل : لأجل ذلك نضع ع = 0 .

$$\text{ع} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3\text{س}^2 - 12\text{س} + 10}{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3} = 0 \\ \text{وَ} \\ \text{س}^2 - 4\text{س} + 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{ع} \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow \text{س} = \frac{6 + \sqrt{6}}{3} \quad \text{أو} \quad \text{س} = \frac{6 - \sqrt{6}}{3}$$

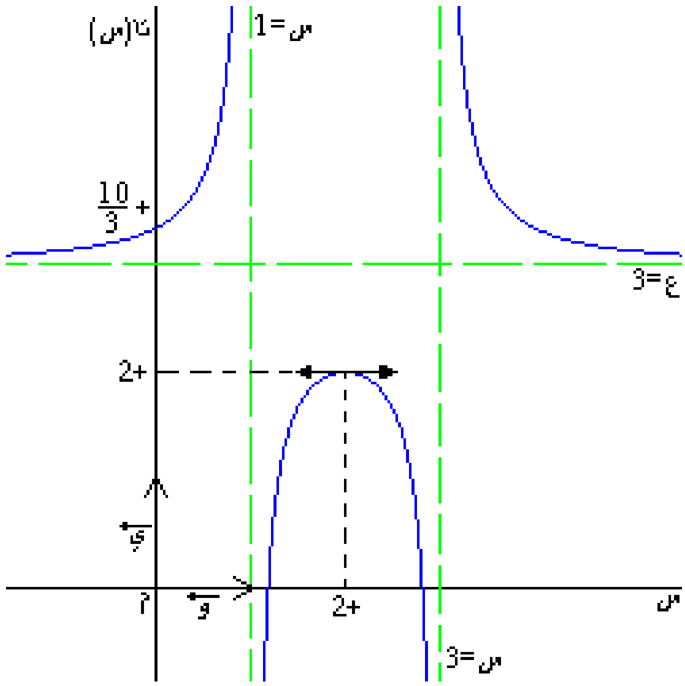
أي أن المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين المعرفتين بـ $\left(\frac{6+\sqrt{6}}{3}، 0\right)$

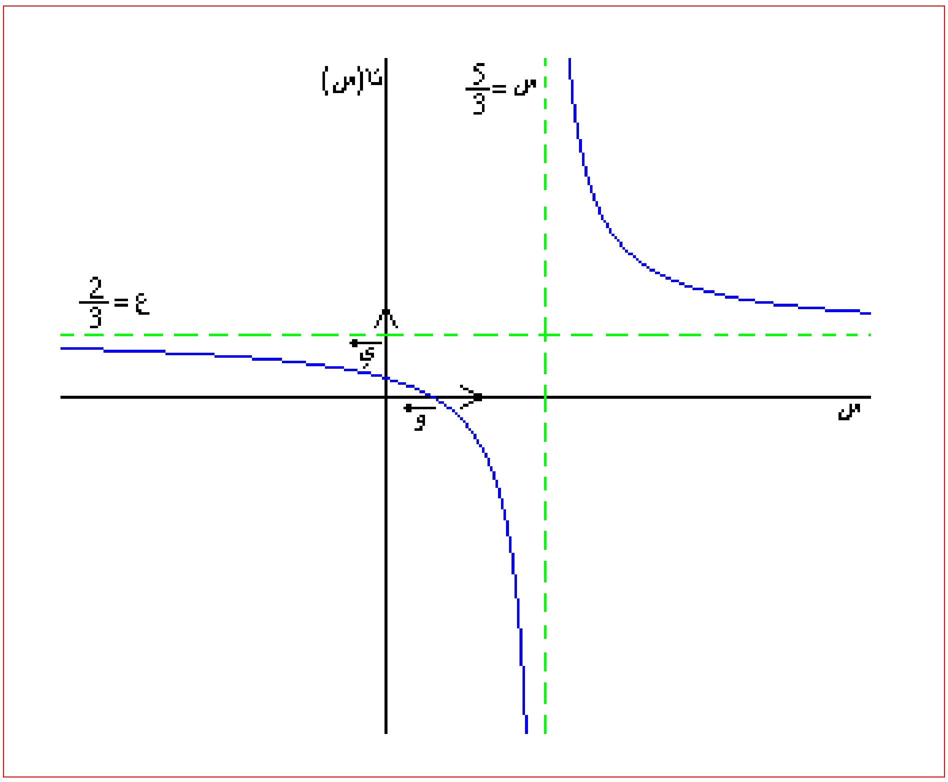
، $\left(\frac{6-\sqrt{6}}{3}، 0\right)$.

• نقاط تقاطع المنحني مع حامل محور التراتيب : لأجل ذلك نضع س = 0 .

س = 0 ، تا(0) = $\frac{10}{3}$ أي أن منحني الدالة تا يقطع حامل محور التراتيب في النقطة المعرفة بـ(0 ، 3,33).

6 – رسم المنحني :





3 – أدرس تغيرات الدالة تا حيث تا(س) = $\frac{س^2+7س+7}{س^2+2س+2}$

وأنشئ المنحني البياني للدالة تا في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$\left(\text{م} ، \vec{\text{و}} ، \vec{\text{ي}}\right)$.

الحل :

1 – مجموعة التعريف : نعلم أنه :

$\forall$ س $\ni$ ح : $\text{س}^2 + 2\,\text{س} + 2 > 0$. إذن ف = $]-\infty ، +\infty[$.

2 – النهايات :

$$\lim_{\text{س}\to-\infty} \text{تا}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to-\infty} \frac{\text{س}^2+7\text{س}+7}{\text{س}^2+2\text{س}+2} = \lim_{\text{س}\to-\infty} \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} = 1$$

$$\lim_{\text{س}\to-\infty} \text{تا}(\text{س}) = 1 \quad \text{(بنفس الطريقة)}$$

المستقيم الذي معادلته ع = 1 هو خط مقارب لمنحني الدالة تا .

3 – إتجاه التغيرات :

- المشتق : الدالة تا قابلة للاشتقاق على ح لأنها دالة ناطقة.

$$\text{تا}'(\text{س}) = \frac{\left(\text{س}^2+7\text{س}+7\right)'\left(\text{س}^2+2\text{س}+2\right) - \left(\text{س}^2+2\text{س}+2\right)'\left(\text{س}^2+7\text{س}+7\right)}{\left(\text{س}^2+2\text{س}+2\right)^2}$$

$$\forall \text{س} \ni \text{ح} : \quad \text{تا}'(\text{س}) = \frac{-5\text{س}^2-10\text{س}}{\left(\text{س}^2+2\text{س}+2\right)^2}$$

- $$\text{تا}'(\text{س}) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-5\text{س}^2-10\text{س}}{\left(\text{س}^2+2\text{س}+2\right)^2} = 0 \\ \text{و} \\ \text{س}^2+2\text{س}+2 \neq 0 \end{array}\right.$$

$$\text{تا}'(\text{س}) = 0 \Leftrightarrow -5\text{س}^2-10\text{س} = 0 \Leftrightarrow -5\text{س}\left(\text{س}+2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{س} = 0 \text{ أو } \text{س} = -2$$

من أجل س = 0 ، تا(0) = $\frac{7}{2}$ ومن أجل س = −2 ، تا(2) = $-\frac{3}{2}$

يكون للمنحني مماسان عند النقطتين أ (0 ، $\frac{7}{2}$) ، وَ ب(−2 ، $-\frac{3}{2}$) يوازيان حامل محور الفواصل.

- تاَ(س) < 0 ⟺ س < −2 أو س > 0 فالدالة تا متناقصة تماما على المجال] − ∞ ، −2 [والمجال] 0 ، + ∞ [
- تاَ(س) > 0 ⟺ −2 < س < 0 فالدالة تا متزايدة تماماً على المجال] − 2 ، 0 [.

4 − جدول التغيرات :

س	− ∞		−2		0		+∞
تاَ(س)							
تا	1	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	1

5 − تعيين نقاط تقاطع المنحني مع حاملي المحورين :

- نقاط تقاطع المنحني مع حامل محور الفواصل : لأجل ذلك نضع ع = 0 .

$$\text{ع} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(\text{س}^2 + 7\text{س} + 7\right)}{\left(\text{س}^2 + 2\text{س} + 2\right)} = 0 \\ \text{س}^2 + 2\text{س} + 2 \neq 0 \end{cases}$$

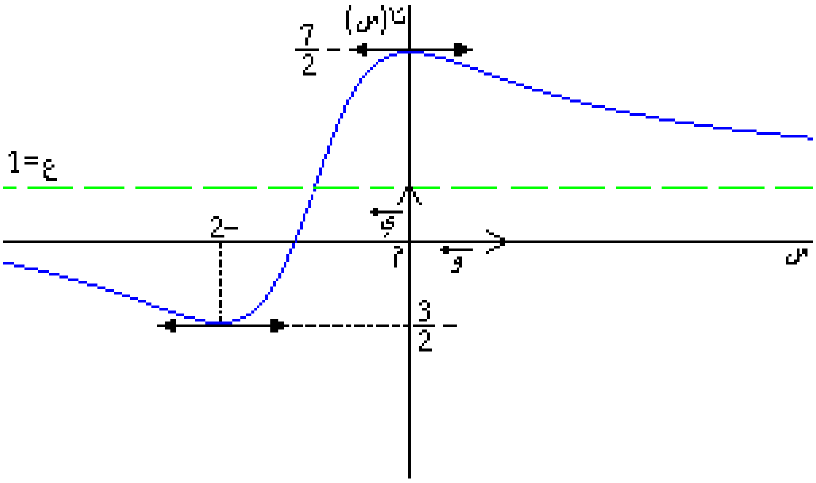
ومنه : $\text{س}^2 + 7\text{س} + 7 = 0 \Leftrightarrow$ س = $-\frac{2,42}{2}$ أو س = $\frac{-11,58}{2}$

أي أن المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين المعرفتين كما يلي: أ ($-\frac{2,42}{2}$ ،0) ، ب($\frac{11,58}{2}$ ، 0) .

- نقاط تقاطع المنحني مع حامل محور التراتيب : لأجل ذلك نضع س = 0 .

س = 0 ، تا(0) = $\frac{7}{2}$ أي أن منحنـي الـدالـة تا يـقطع مـحـور الـتـراتـيـب فـي الـنـقطـة جـ(0 ، $\frac{7}{2}$).

6 – رسم الـمـنـحـنـي :



II – دالـة تـشـمـل قـيـمـة مطـلـقـة :

مـثـال : أدرس تـغـيـرات الـدالـة تـا حـيـث تـا(س) = $\frac{س^2 + |2س - 1|}{س}$

وأنـشـئ الـمـنـحـنـي الـبـيـانـي لـهـا فـي الـمـسـتـوي الـمـنـسـوب إلـى مـعـلـم مـتـعـامـد ومـتـجـانـس $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$.

الـحـل :

1 – مـجـمـوعـة الـتـعـريـف : الـدالـة تا مـعرفـة مـن أجل س ≠ 0. إذن ف = ح* = $]-\infty ، 0[\cup]0 ، +\infty[$

لدراسـة هـذه الدالـة نزيل القيـمـة الـمـطـلـقـة تـبـعـاً لـقـيـم س.

نـلاحـظ أن : $|2س - 1| = 2س - 1$. لـمّا س $\geq \frac{1}{2}$.

وَ $|2س - 1| = 1 - 2س$. لـمّا س $\leq \frac{1}{2}$.

$$\text{إذن : ا تـ}(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2+2س-1}{س} \;. & \text{لما } س \geq \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{س^2-2س+1}{س} \;. & \text{لما } س \in \left]-\infty ، 0\right[\cup \left]0 ، \dfrac{1}{2}\right[\end{cases}$$

2 – النهايات :

$$\underset{س \to +\infty}{\text{نها}} \; \text{تا}(س) = \underset{س \to +\infty}{\text{نها}} \; \frac{س^2+2س-1}{س} = +\infty$$

$$\underset{س \to -\infty}{\text{نها}} \; \text{تا}(س) = \underset{س \to -\infty}{\text{نها}} \; \frac{س^2-2س+1}{س} = -\infty$$

$$\text{. لأن : } \begin{cases} \underset{س \xrightarrow{<} 0}{\text{نها}} \left(س^2-2س+1\right) = 1 \\[2ex] \underset{س \xrightarrow{<} 0}{\text{نها}} \left(س\right) = 0^+ \end{cases}$$

$$\underset{س \xrightarrow{<} 0}{\text{نها}} \; \text{تا}(س) = +\infty \text{ . لأن : } \begin{cases} \underset{س \xrightarrow{<} 0}{\text{نها}} \left(س^2-2س+1\right) = 1 \\[2ex] \underset{س \xrightarrow{<} 0}{\text{نها}} \left(س\right) = 0^- \end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة تا يمكن كتابتها على الشكل :

$$\text{تا}(س) = \begin{cases} س + 2 - \dfrac{1}{س} & \text{لما } س \geq \dfrac{1}{2} \\[2ex] س + 2 - \dfrac{1}{س} & \text{لما } س \in \left]-\infty ، \dfrac{1}{2}\right[- \{0\} \end{cases}$$

بما أن $\underset{س \to +\infty}{\text{نها}} \; \text{تا}(س) = -\infty$ وَ $\underset{س \to +\infty}{\text{نها}} \; \text{تا}(س) = +\infty$

نبحث عن الخطوط المقاربة المائلة .

نضع ع = س + 2 ونحسب $\underset{س \to +\infty}{\text{نها}} \left(\text{تا}(س) - ع \right)$

$$\lim_{\text{س}\to+\infty}\left(\text{تا}(\text{س})-\text{ع}\right)=\lim_{\text{س}\to+\infty}\left[(\text{س}+2)-\frac{1}{\text{س}}-(\text{س}+2)\right]=\lim_{\text{س}\to+\infty}\left(-\frac{1}{\text{س}}\right)=0$$

إذن المستقيم الذي معادلته ع = س+2 هو خط مقارب مائل لمنحني الدالة تا .

وكذلك :

$$\lim_{\text{س}\to-\infty}\left(\text{تا}(\text{س})-\text{ع}\right)=\lim_{\text{س}\to-\infty}\left[(\text{س}-2)+\frac{1}{\text{س}}-(\text{س}-2)\right]=\lim_{\text{س}\to-\infty}\left(\frac{1}{\text{س}}\right)=0$$

إذن المستقيم الذي معادلته ع = س − 2 هو خط مقارب مائل لمنحني الدالة تا .

3 – إتجاه تغيرات :

- المشتق : من أجل كلّ س من ح* لدينا :

$$\text{تاَ}(\text{س})=\begin{cases}1+\dfrac{1}{\text{س}^2}\ .\ \text{لما س} \geq \dfrac{1}{2}\\[2mm] 1-\dfrac{1}{\text{س}^2}\ .\ \text{لما س} \neq 0 \text{ وَ س} < \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\text{تاَ}(\text{س})=\begin{cases}1+\dfrac{1}{\text{س}^2}\ .\ \text{لما س} \geq \dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{\text{س}^2}\ .\ (\text{س}-1)(\text{س}+1)\ \text{لما س} \neq 0 \text{ وَ س} < \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

من أجل س ≥ $\frac{1}{2}$ ، تاَ(س) >0 فالدالة تا متزايدة تماماً على المجال] $\frac{1}{2}$ ، + ∞ [.

من أجل س < 0 أو 0 < س ≤ $\frac{1}{2}$ يكون المشتق كما يلي :

لمّا س < −1 ، تاَ(س) > 0 فالدالة تا متزايدة تماماً على المجال] − ∞ ، −1[.

لما −1 < س < 0 ، تاَ(س) < 0 فالدالة تا متناقصة تماماً على كل من المجالين] −1 ، 0 [وَ] 0 ، + $\frac{1}{2}$] .

لندرس قابلية الإشتقاق عند س_0 = $\frac{1}{2}$.

$$\underset{\substack{< \\ س \to س_0}}{\text{نـهـا}} \frac{\text{تـا}(س) - \text{تـا}(س_0)}{س - س_0} = \underset{\substack{< \\ س \to \frac{1}{2}}}{\text{نـهـا}} \frac{\frac{س^2+2س-1}{س} - \frac{1}{2}}{س - \frac{1}{2}} = \underset{\substack{< \\ س \to \frac{1}{2}}}{\text{نـهـا}} \frac{\frac{2س^2+3س-2}{2س}}{س - \frac{1}{2}} = 5$$

إذن الـدالـة تـا تـقبـل الاشـتـقـاق عـلـى يـمـيـن $\frac{1}{2}$

$$\underset{\substack{< \\ س \to س_0}}{\text{نـهـا}} \frac{\text{تـا}(س) - \text{تـا}(س_0)}{س - س_0} = \underset{\substack{< \\ س \to \frac{1}{2}}}{\text{نـهـا}} \frac{\frac{س^2+2س-1}{س} - \frac{1}{2}}{س - \frac{1}{2}} = \underset{\substack{< \\ س \to \frac{1}{2}}}{\text{نـهـا}} \frac{\frac{2س^2-5س-2}{2س}}{س - \frac{1}{2}} = -3$$

إذن الـدالـة تـا تـقبـل الاشـتـقـاق عـلـى يـسـار $\frac{1}{2}$.

نـلاحـظ أن : $\text{تـاَ} \left(\frac{1}{2}\right)^{+} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^{-}$. فالـدالـة لا تقبـل الاشتـقـاق عند $\frac{1}{2}$.

فالـنقـطـة ($\frac{1}{2}$ ، تـا($\frac{1}{2}$)) هي نـقطـة زاوية وعندها يكون لـلمـنـحـنـي نصفـا مماسـيـن. نلاحظ أن للدالة تا قيمة عظمى قيمـتها −4 من أجل س = −1 .

4 − جـدول الـتـغـيـرات :

س	$-\infty$	-1		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
تـاَ(س)	+	0	−	‖	−	‖	+	
تـا	$-\infty$ ↗	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$	↗ $-\infty$	

5 − تعيين نقاط تـقـاطـع المـنـحـنـي مـع حـامـلـي الـمـحـوريـن :

نـقـاط تـقـاطـع الـمـنـحـنـي مـع حـامـل مـحـور الـفـواصـل : لأجـل ذلـك نـضـع ع = 0 .

$$\text{ع} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 + |2\text{س} - 1|}{\text{س}} = 0 \quad ..... \text{I} \\ \text{وَ} \quad \text{س} \neq 0 \end{cases}$$

لما س $\leq \frac{1}{2}$ المعادلة (I) تصبح س^2 + 2 س−1 = 0

لما (س $\geq \frac{1}{2}$ وَ س ≠ 0) المعادلة (I) : س^2 + 2 س − 1 = 0

وفي الحالتين المعادلة لا تقبل حلولا. أي أن المنحني لا يقطع حامل محور الفواصل.

- نقاط تقاطع المنحني مع حامل محور التراتيب : لأجل ذلك نضع س =0.

ومن أجل س = 0 الدالة تا غير معرفة فالمنحني لا يقطع حامل محور التراتيب.

- دراسة وضع المنحني بالنسبة لخطيه المقاربين المائلين :

من أجل س $\leq \frac{1}{2}$ ، ع = س + 2 .... (Δ_1)

تا(س) − ع = $-\frac{1}{\text{س}}$.

من أجل س > 0 ، تا(س) − ع < 0 فالمنحني في هذه الحالة يقع تحت الخط المقارب المائل (Δ_1).

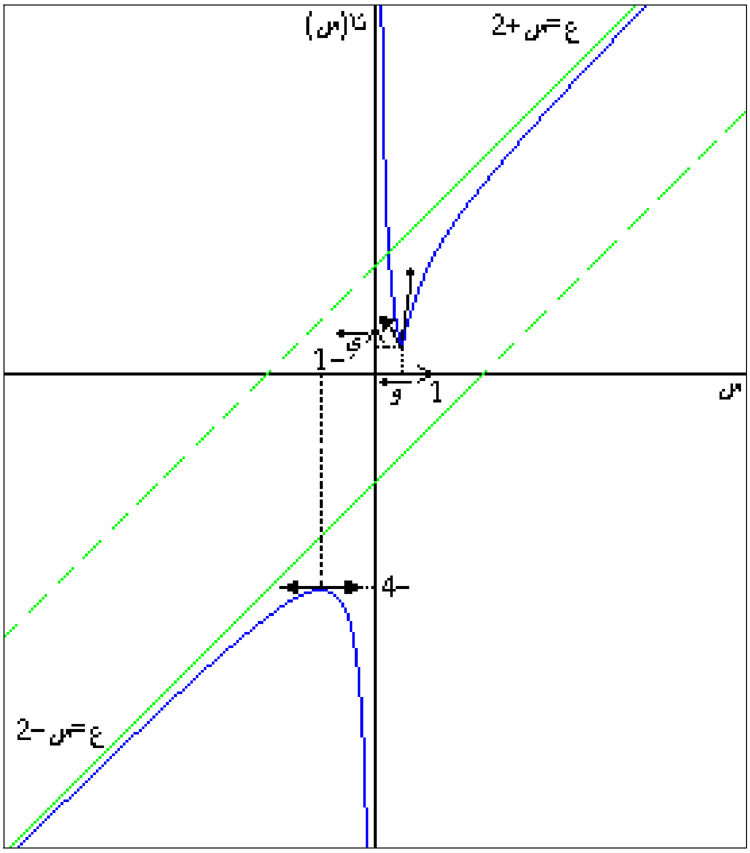
ومن أجل من أجل س< $\frac{1}{2}$ وَ س ≠ 0 .

تا(س) − ع =(س − 2) + $\frac{1}{\text{س}}$ −(س − 2) = $\frac{1}{\text{س}}$ ، ع = س − 2 .... (Δ_2).

من أجل س > 0، تا(س) − ع > 0 فالمنحني يقع فوق الخط المقارب (Δ_2)

من أجل س < 0، تا(س) − ع < 0 فالمنحني يقع فوق الخط المقارب المائل (Δ_2)

6 – رسم المنحني :



III – الدالة الصماء :

مثال : أدرس تغيرات الدالة تا حيث $تا\left(س\right)=\sqrt{\frac{س-1}{س+1}}$.

وأنشئ المنحني البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(م، \vec{و}، \vec{ي}\right)$.

الحل :

1 – مجموعة التعريف :

$$\frac{س-1}{س+1} \geq 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (س+1)(س-1) \geq 0 \\ س+1 \neq 0 \quad وَ \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} س \in]-\infty ، -1] \cup [1 ، +\infty[\\ وَ \\ س \neq -1 \end{array}\right.$$

ومنه : ف $= \boxed{]-\infty ، -1[\cup [1 ، +\infty[}$

2 – النهايات :

$$\lim_{س \to -\infty} تا(س) = \lim_{س \to -\infty} \left(س + \sqrt{\frac{س-1}{س+1}}\right)$$

لدينا : $\left\{\begin{array}{l} \lim_{س \to -\infty} (س) = -\infty \\ \lim_{س \to -\infty} \frac{س-1}{س+1} = 1 \end{array}\right.$ ومنه $\lim_{س \to -\infty} \sqrt{\frac{س-1}{س+1}} = 1$ إذن $\lim_{س \to -\infty} تا(س) = -\infty$

$\lim_{س \to +\infty} تا(س) = +\infty$ (بنفس الطريقة).

$$\lim_{\substack{س \to -1 \\ <}} تا(س) = \lim_{\substack{س \to -1 \\ <}} \left[س + \sqrt{\frac{س-1}{س+1}}\right]$$

لدينا : $\left\{\begin{array}{l} \lim_{\substack{س \to -1 \\ <}} (س) = -1 \\ \lim_{\substack{س \to -1 \\ <}} (س-1) = -2 \\ \lim_{\substack{س \to -1 \\ <}} (س+1) = 0^- \end{array}\right.$ ومنه $\lim_{\substack{س \to -1 \\ <}} \frac{س-1}{س+1} = +\infty$

وبالتالي $\lim_{\substack{س \to -1 \\ <}} \sqrt{\frac{س-1}{س+1}} = +\infty$ وَ $\lim_{\substack{س \to -1 \\ <}} تا(س) = +\infty$

ملاحظة : عند 1 الدالة تا معرفة وَ تا(1) = 1 .

3 – **إتجاه تغيرات** : الدالة تا مجموع دالتين مستمرتين على ف . إذن تا مستمرة على ف.

• الإشتقاق : حساب العدد المشتق : $\forall$ س $\in$ ف – { 1 } .

$$\text{تاَ}(\text{س}) = \frac{1+\left(\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}}} = 1 + \frac{\frac{2}{(\text{س}+1)^2}}{2\sqrt{\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}}}$$

$$\text{تاَ}(\text{س}) = 1 + \frac{2}{2(\text{س}+1)^2 . \sqrt{\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}}} = 1 + \frac{1}{(\text{س}+1)^2 . \sqrt{\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}}}$$

• دراسة إشارة المشتق :

العدد تاَ(س) هو مجموع حدين موجبين .

إذن $\forall$ س ∋ ف ، تاَ(س) > 0 فالدالة تا متزايدة تماما على كل من مجالين ف.

ملاحظة : عند 1 نجد $\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1} = 0$

تاَ(1) = + ∞ .

4 – جدول تغيرات :

س	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
تاَ(س)	+	‖	‖	+
تا	$-\infty \nearrow +\infty$	‖		$1 \nearrow +\infty$

5 – نقاط تقاطع المنحني مع حاملي المحورين :

• نقاط تقاطع المنحني مع حامل محور التراتيب :

لدينا 0 لا ينتمي إلى ف إذن المنحني لا يقطع حامل محور التراتيب .

• نقاط تقاطع المنحني مع حامل محور الفواصل : لأجل ذلك نضع تا(س) = 0

$$\text{تاَ}(\text{س}) = 0 \Leftrightarrow \text{س} + \sqrt{\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}} = -\text{س}$$

$$\text{تاَ}(\text{س}) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\text{س}-1}{\text{س}+1} = \text{س}^2 \\ \text{وَ} -\text{س} \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{س}^3 + \text{س}^2 - \text{س} + 1 = 0 \\ \text{وَ}\ \text{س} \leq 0 \end{array}\right.$$

أي (س > −1 لأن ف =] − ∞ ، −1 [∪] 1 ، + ∞ [.)

• من خلال جدول التغيرات نلاحظ تا مستمرة على]− ∞ ، −1 [

وَ تا رتيبة تماما على هذا المجال.

إذن تا تطبيق تقابلي من] − ∞ ، −1 [نحو] − ∞ ، +∞ [

ومنه المعادلة تا(س) = 0 تقبل حلا وحيدا في المجال] − ∞ ، −1 [.

• لحل المعادلة $س^3 + س^2 - س + 1 = 0$ نستخدم نظرية القيمة الوسطى للبحث عن حل تقريبي في المجال]−∞ ، −1 [.

بوضع ها(س) = $س^3 + س^2 - س + 1$.

نجد ها دالة كثير الحدود مستمرة على المجال ل = [−2 ، $-\frac{3}{2}$] حيث ها(−2) = −1 ، ها $\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{8}$ ومنه ها(−2) . ها$\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$.

إذن يوجد α ∋] −2 ، $-\frac{3}{2}$ [بحيث ها(α) = 0 .

إذن المنحني يقطع محور الفواصل في النقطة ن (α ، 0) .

• دراسة الفروع اللانهائية :

حسب دراسة النهايات $\lim\limits_{س \to -1^{>}} تا(س) = +\infty$

إذن للمنحني مستقيم مقارب عمودي معادلته س = − 1 .

* $\lim\limits_{س \to +\infty} تا(س) = +\infty$ ، لذا ندرس $\lim\limits_{س \to +\infty} \frac{تا(س)}{س}$

$$\lim_{س \to +\infty} \frac{تا(س)}{س} = \lim_{س \to +\infty} \frac{س + \sqrt{\frac{س-1}{س+1}}}{س} = \lim_{س \to +\infty} \frac{س}{س} + \lim_{س \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{س-1}{س+1}}}{س} = 1$$

(لأن $\lim\limits_{س \to +\infty} \sqrt{\frac{س-1}{س+1}} = 1$ وَ $\lim\limits_{س \to +\infty} س = +\infty$)

$$\lim_{س \to +\infty} \left(تا(س) - س \right) = \lim_{س \to +\infty} \left(س + \sqrt{\frac{س-1}{س+1}} - س \right) = 1$$

ومنه المنحني فرع لا نهائي يقبل خطاً مقارباً مائلا معادلته ع = س+1 (بنفس الطريقة عندما س← − ∞) .

- دراسة وضعية المنحني بالنسبة لخطه المقارب المائل :

$$تا(س) - ع = س + \sqrt{\frac{س-1}{س+1}} - (س+1) = \sqrt{\frac{س-1}{س+1}} - 1 .$$

$$تا(س) - ع = س + \sqrt{\frac{|س-1|}{|س+1|}} - 1 = \frac{\sqrt{|س-1|} - \sqrt{|س+1|}}{\sqrt{|س+1|}}$$

$$تا(س) - ع = \frac{|س-1| - |س+1|}{\sqrt{|س+1|}} \times \frac{1}{\sqrt{|س-1|} + \sqrt{|س+1|}}$$

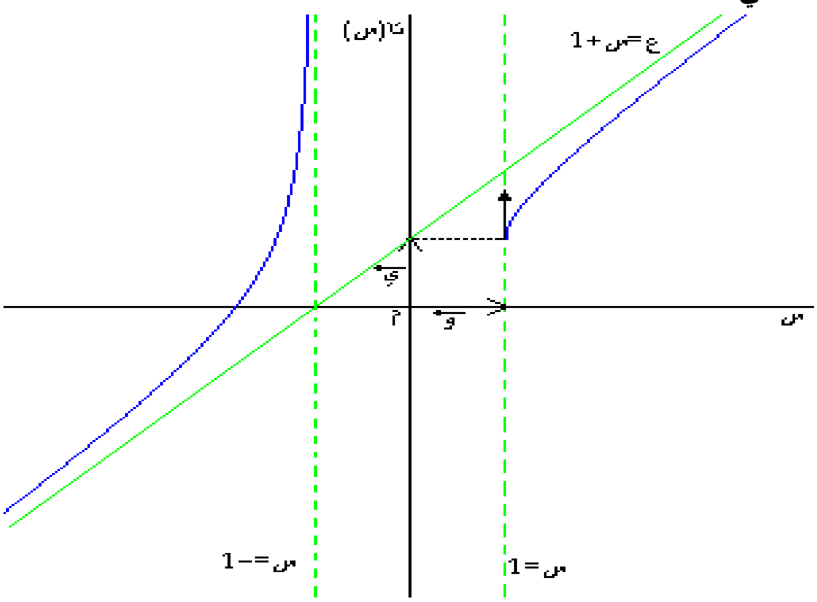
المقام موجب إذن إشارة تا(س) − ع تتعلق بإشارة البسط .

س	− ∞ −1		+1 + ∞
إشارة (س −1)	−		+
|س − 1|	−(س − 1)		س − 1
إشارة (س +1)	−		+
|س + 1|	−(س + 1)		س + 1
|س−1| - |س+1|	+ 2		− 2

لما س ∈] 1 ، + ∞ [، تا(س) − ع < 0 . و منه المنحني يقع تحت الخط المقارب المائل.

لما س ∈] − ∞ ، −1[، تا(س) − ع > 0 . ومنه المنحني يقع فوق الخط المقارب المائل.

6 − رسم المنحني :



IV – الدوال الدورية :

– تمهيد :

لدراسة الدوال المثلثية يجب معرفة دساتير التحويل الآتية : $\forall \alpha \ni$ ح ، $\forall \beta \ni$ ح يكون :

- تجب $(-\alpha)$ = تجب α. (لأن الدالة جيب التمام زوجية).
- جب $(-\alpha)$ = − جب α. (لأن الدالة جيب التمام فردية).
- ظل α = $\frac{\text{جب } \alpha}{\text{تجب } \alpha}$ حيث : $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ + ك π ، ك $\ni$ ص.
- تجب^2 α + جب^2 α = 1
- جب$(\pi -\alpha)$ = جب α، تجب $(\pi -\alpha)$ = −تجبα ، ظل $(\pi -\alpha)$ = −ظل α.
- جب$(\frac{\pi}{2} -\alpha)$ = تجب α، تجب $(\frac{\pi}{2} -\alpha)$ = جبα ، ظل $(\frac{\pi}{2} -\alpha)$ = تظل α.
- جب$(\pi +\alpha)$ = −جب α، تجب $(\pi +\alpha)$ = −تجبα ، ظل $(\pi +\alpha)$ = ظل α.
- جب$(\frac{\pi}{2} +\alpha)$ = جب$(\frac{\pi}{2} -\alpha)$ = تجبα، تجب $(\frac{\pi}{2} +\alpha)$ = −تجب$(\frac{\pi}{2} -\alpha)$ = جبα.

  ظل $(\frac{\pi}{2} +\alpha)$ = − تظل α.
- تجب $(\alpha + \beta)$ = تجب α تجب β − جب α . جب β . (1)

  جب $(\alpha + \beta)$ = تجب α جب β + تجب β جب α . (2)

  تجب 2 α = تجب^2 α − جب^2 α .

  = 2 تجب^2 α − 1 .

  = 1 − 2 جب^2 α .

  جب 2 α = 2 تجب α جب α .
- تجب α + تجب β = 2 تجب $\frac{\alpha+\beta}{2}$. تجب $\frac{\alpha-\beta}{2}$.

  تجب α − تجب β = −2 جب $\frac{\alpha+\beta}{2}$. جب $\frac{\alpha-\beta}{2}$.

  جب α + جب β = 2 جب $\frac{\alpha+\beta}{2}$. تجب $\frac{\alpha-\beta}{2}$.

  جب α − جب β = 2 جب $\frac{\alpha-\beta}{2}$. تجب $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

• جب α . تجب β = $\frac{1}{2}$ [جب ($\alpha + \beta$) + جب ($\alpha - \beta$)] .

تجب α . تجب β = $\frac{1}{2}$ [تجب ($\alpha + \beta$) + تجب ($\alpha - \beta$)] .

جب α . جب β = $\frac{1}{2}$ [تجب ($\alpha - \beta$) − تجب ($\alpha + \beta$)] .

• إذا كان ا $\neq 0$ وَ ب $\neq 0$ فإنه : $\forall$ س $\ni$ ح :

ا تجب س + ب جب س = $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ $\left[\frac{ا}{\sqrt{ا^2+ب^2}} \text{تجب س} + \frac{ب}{\sqrt{ا^2+ب^2}} \text{جب س}\right]$

= $\sqrt{ا^2+ب^2}$ تجب (س−θ)

حيث θ عدد حقيقي وَ يكون تجب θ = $\frac{ا}{\sqrt{ا^2+ب^2}}$ وَ جب θ = $\frac{ب}{\sqrt{ا^2+ب^2}}$

• **دور دالــة :**

لتكن تا دالة معرفة على مجال ف نقول أن العدد د هو دور الدالة تا إذا كان العدد **د** هو أصغر عدد حقيقي موجب تماما بحيث : $\forall$ س $\ni$ ف : تا (س + د) = تا(س) .

أمثلـة :

س $\xrightarrow{\text{تا}}$ تجب س . دورها هو د = 2π .

س $\xrightarrow{\text{تا}}$ جب س . دورها هو د = 2π .

س $\xrightarrow{\text{تا}}$ ظل س . دورها هو د = π .

ملاحظة :

إذا كان **د** دور للدالة تا فإن كل عدد من الشكل ك د حيث ك $\ni$ ص هو أيضا دور للدالة تا .

نتيجة :

• س $\xrightarrow{\text{تا}}$ تجب (اس + ب) . دورها هو د = $\frac{2\pi}{|ا|}$ حيث ا $\neq 0$.

• س $\xrightarrow{\text{تا}}$ جب (اس + ب) . دورها هو د = $\frac{2\pi}{|ا|}$ حيث ا $\neq 0$.

• س $\xleftarrow{\text{تا}}$ ظل (أ س + ب) . دورها هو د = $\dfrac{\pi}{|أ|}$ حيث أ $\neq 0$.

أمثلة :

1) * س $\xleftarrow{\text{تا}}$ تجب 3 س ، لدينا أ = 3 وَ ب = 0 إذن دورها هو د = $\dfrac{2\pi}{3}$.

2) * س $\xleftarrow{\text{تا}}$ ظل($\dfrac{\text{س}}{2}$+5)، لدينا أ = $\dfrac{1}{2}$ وَ ب = 5 إذن دورها هو د = $\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

3) * س $\xleftarrow{\text{تا}}$ $\dfrac{\text{جب 3 س}}{\text{تجب 6 س}}$.

لدينا دور جب 3 س هو $د_1$ = $\dfrac{2\pi}{3}$ وَ دور تجب 6 س هو $د_2$ = $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

ونلاحظ أن $د_1$ = 2 $د_2$ = $\dfrac{2\pi}{3}$ أي أن المضاعف المشترك الأصغر للعددين $د_1$ وَ $د_2$ هو $\dfrac{2\pi}{3}$. نستنتج أن دور هذه الدالة هو $\dfrac{2\pi}{3}$.

4) س $\mapsto$ تجب 3 س + جب 5 س .

لدينا دورر تجب 3 س هو $د_1$ = $\dfrac{2\pi}{3}$ و دور جب 5 س هو $د_2$ = $\dfrac{2\pi}{5}$.

ومنه : 3 $د_1$ = 2π وَ 5 $د_2$ = 2π أي 3 $د_1$ = 5 $د_2$ = 2π إذن 3 $د_1$ هو مضاعف $د_1$ وَ 5 $د_2$ هو مضاعف $د_2$ و كلاهما يساوي 2π. نستنتج أن 2π هو مضاعف مشترك للدورين $د_1$ وَ $د_2$ ويكون في هذه الحالة الدور هو د = 2π .

ملاحظات هامة لرسم منحني دالة دورية :

1 – إذا كانت تا دالة دورية وَ دورها د، وكان (γ) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم$(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$ فإننا نكتفي برسم جزء من المنحنى (γ) في مجال طوله د ثم نكمل رسم المنحني (γ) بإجراء إنسحابات أشعتها (ك . د)$\vec{و}$ حيث ك$\in$ ص.

2 – إذا كانت تا دالة زوجية فإن منحنيها البياني يكون متناظرا بالنسبة لحامل محور التراتيب.

3 – إذا كانت تا دالة فردية فإن منحنيها البياني يكون متناظرا بالنسبة للمبدأ م .

4 – إذا كانت كل نقطة ن (هـ – س ، تا(س)) من المنحني (γ) تتحول إلى النقطة نَ

(س ، تا(س)) فإن المنحني (γ) يقبل المستقيم الذي معادلته س $= \frac{هـ}{2}$ كمحور تناظر له فنأخذ مجال الدراسة $\left]-\frac{هـ}{2} ، \frac{هـ}{2}\right[$ ونكمل المنحني (γ) المحصّل عليه بالتناظر بالنسبة للمستقيم الذي معادلته س $= \frac{هـ}{2}$.

1 – أدرس تغيرات الدالة تا المعرفة كما يلي :

تا : ح $\leftarrow$ ح ، س $\mapsto$ تا(س) = تجب^{2}س . جب 2 س .

ثم أرسم المنحني البياني (γ) الممثل لها في المستوي المنسوب لمعلم متعامد $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$.

الحل :

- مجموعة التعريف : الدالتان الجيب وجيب التمام معرفتان على ح ومنه ف$_{تا}$ = ح .
- الدور : لدينا دور تجب س هو د$_1$ = 2π وَ دور جب 2 س هو

$$د_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi .$$

فنجد 2 د$_2$ = د$_1$ = 2 π وبما أن 2 د$_2$ هو أيضا دورًا لِـ جب 2 س فإن 2 π هو دور مشترك لِـ جب 2 س وَ تجب س. إذن دور الدالة تا هو د = 2π.

لذلك ندرس الدالة تا على مجال طوله 2π مثلا [– π ، π] .

- لدينا : $\forall$ س $\in$ ف$_{تا}$ ، – س $\in$ ف$_{تا}$ وَ تا(–س) = تجب^2 (–س) . جب (–2س)

= تجب^{2}س (–جب 2س)

= – تجب^2 س . جب 2س .

= – تا(س) .

إذن الدالة تا فردية ولهذا يمكن اقتصار دراستها على المجال ك = ف$_{تا}$ $\cap$ ح$_+$ أي ك = [0 ، π] .

- أخيرا لدينا : $\forall$ س $\in$ ح، تا (π – س) = تجب^2 (π – س) .جب (π – س)

تا(π – س) = [تجب (π – س)]^2 . جب (π – س) .

تا(π – س) = (–تجب س)^2. جب س . لأن تجب (π – س) = – تجب س .

تا(π – س) = تجب^{2}س . جب س . وَ جب (π – س) = جب س .

تا(π – س) = تا(س) .

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته س = $\frac{\pi}{2}$ هو محور تناظر للمنحني (γ) ومنه ندرس الدالة تا على المجال [0 ، $\frac{\pi}{2}$] ثم نكمل المنحني (γ) المحصل عليه بالتناظر بالنسبة للمستقيم المذكور (س = $\frac{\pi}{2}$).

• **النهايات :**

الدالة تا معرفة على المجال [0 ، $\frac{\pi}{2}$] حيث تا(0) = 0 وَ تا($\frac{\pi}{2}$) = 0 .

• الاستمرار والاشتقاق :

الدالة تا هي جداء دالتين " الجيب و جيب التمام " و كلتاهما مستمرة على ح وقابلة للاشتقاق على ح. إذن تا مستمرة على المجال [0 ، $\frac{\pi}{2}$] وتا قابلة للاشتقاق على] 0 ، $\frac{\pi}{2}$ [حيث :

$\forall$ س $\in$] 0 ، $\frac{\pi}{2}$ [، تاَ(س) = (تجب^{2}س)َ جب 2س + (جب2س)َ تجب^{2}س

تاَ(س) = 2(تجب س)َ. تجب س جب 2س+ 2 تجب 2س تجب^2 س

= −2 جب س تجب س جب 2س + 2تجب 2س تجب^2 س

= −4 تجب^{2}س جب^{2}س + 2 تجب 2 س تجب^{2}س .

لأن (جب 2س =2 تجب س × جب س)

= 2 تجب^{2}س (−2 جب^{2}س + تجب 2 س)

= 2 تجب^{2}س (−2 جب^{2}س + تجب^{2}س − جب^2 س).

لأن تجب 2س = تجب^{2}س − جب^2 س .

= 2 تجب^{2}س (−3 جب^{2}س+1−جب^{2}س). لأن تجب^{2}س = 1−جب^{2}س.

= 2 تجب^{2}س (−4 جب^{2}س + 1).

إذن :

$\boxed{\text{تاَ(س) = 2 تجب}^2\text{س (1 − 4 جب}^2\text{س).}}$

• دراسة إشارة العدد تاَ(س) على المجال] 0 ، $\frac{\pi}{2}$ [:

لدينا تاَ(س) = 0 $\Leftrightarrow$ 2 تجب^{2}س (1 − 4 جب^{2}س) = 0

$\Leftrightarrow$ تجب^{2}س = 0 أو 1 − 4 جب^{2}س = 0

$\Leftrightarrow$ تجب س = 0 أو 1−2 جب س = 0 أو 1 +2 جب س = 0

$\Leftrightarrow$ تجب س = 0 أو جب س = $\frac{1}{2}$ أو جب س = $-\frac{1}{2}$.

• $\forall$ س $\in$] 0 ، $\frac{\pi}{6}$ [$\cup$] $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{2}$ [إشارة العدد تاَ(س) هي نفس إشارة العدد (− 4 جب^2 س + 1) لأن : تجب^{2}س $\neq$ 0 وَ تجب^{2}س > 0 ولذا نضع ع = جب س ويكون العدد −4 جب^{2}س+ 1 =−4 ع^2+1 بحيث −1 $\leq$ ع $\leq$ 1.

(لأن −1 $\leq$ جب س $\leq$ 1) و منه −4 ع^2 +1 = (− 2 ع + 1) (2 ع + 1)

إذن العدد −4 ع^2 +1 ينعدم من أجل ع = $\frac{1}{2}$ أو ع = $-\frac{1}{2}$ نجد :

ع	1−		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1+
إشارة −4 ع^2 +1		−	0	+	0	−	

نستنتج ما يلي :

• تاَ(س) > 0 $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2}$ < جب س < $\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ 0 $\leq$ جب س < $\frac{1}{2}$ (لأن س $\in$] 0 ، $\frac{\pi}{2}$ [ ) .

$\Leftrightarrow$ 0 $\leq$ س < $\frac{\pi}{6}$.

• تاَ(س) < 0 $\Leftrightarrow$ −1 < جب س < $-\frac{1}{2}$ أو $\frac{1}{2}$ < جب س < +1 .

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}$ < جب س < 1 .(لأن س $\in$] 0 ، $\frac{\pi}{2}$ [ ) .

$\Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{6}$ < س < $\frac{\pi}{2}$.

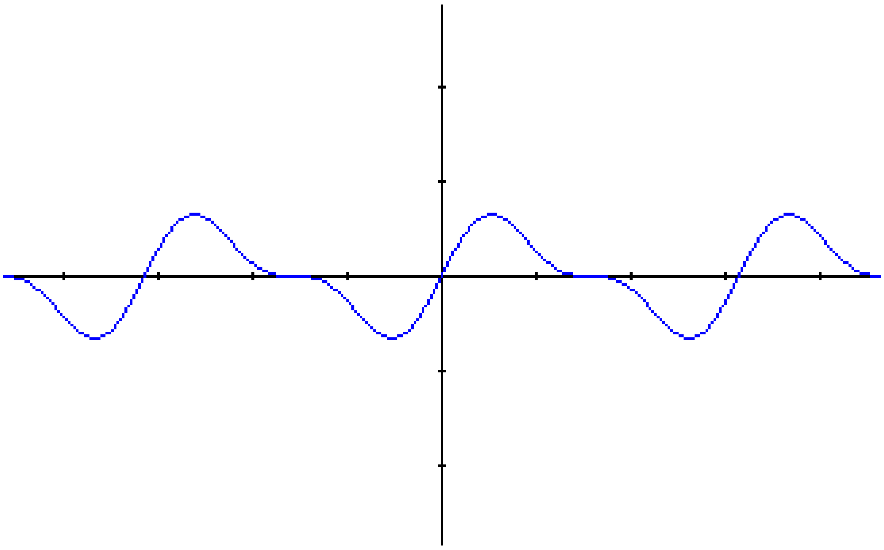
• حساب تا($\frac{\pi}{6}$)

$$تا\left(\frac{\pi}{6}\right) = تجب^{2}\frac{\pi}{6}\,جب\frac{2\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

جدول التغيرات :

س	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$
تاَ(س)		+	0	−	
تغيرات تا	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	0

رسم المنحني :



2 – أدرس تغيرات الدالة تا المعرفة كما يلي :

$$تا : ح \leftarrow ح \quad : \quad تا(س) = \frac{تجب2س}{تجب\ س}.$$

ثم أرسم المنحني (γ) الممثل للدالة تا في المستوي المنسوب لمعلم متعامد $(م، \vec{و}، \vec{ي})$.

الحل :

دراسة تغيرات الدالة تا :

• مجموعة التعريف :

العدد تا(س) غير معرف إذا وفقط إذا كان :

تجب س = 0 أي س = $\frac{\pi}{2}$ + ك π ، ك ∋ ص

إذن ف$_{تا}$ = ح − { $\frac{\pi}{2}$ + ك π / ك ∋ ص}

• الدور :

دور تجب 2 س هو د$_1$ = $\frac{2\pi}{2}$ = π .

دور جب س هو د$_2$ = 2 π .

و منه د$_2$ = 2 د$_1$ = 2 π . إذن 2 π هو مضاعف مشترك للعددين د$_1$ وَ د$_2$ وبالتالي 2 π هو دور الدالة تا . لذلك ندرس الدالة تا على مجال طوله 2 π وليكن المجال [−π ، π] . وبما أن تا غير معرفة عند −$\frac{\pi}{2}$ وَ $\frac{\pi}{2}$ يكون مجال دراستها هو : ل = [− π ، −$\frac{\pi}{2}$ [∪] −$\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ [∪] $\frac{\pi}{2}$ ، π] .

• ∀ ∋ ف$_{تا}$ ، − س ∋ ف$_{تا}$ وَ تا(−س) = $\frac{\text{تجب}(-2\text{س})}{\text{تجب}(-\text{س})}$ = $\frac{\text{تجب } 2\text{س}}{\text{تجب س}}$

(لأن الدالة جيب التمام زوجية) .

تا(−س) = تا(س) .

ومنه الدالة تا زوجية ولهذا نكتفي بدراسة الدالة تا على المجال لَ = [0 ، $\frac{\pi}{2}$ [∪] $\frac{\pi}{2}$ ، π] .

• **النهايات :**

الدالة تا معرفة من أجل س = 0 أو س = π حيث تا(0) = 1 وَ تا(π) = −1

ولدينا
$$\begin{cases} \underset{\text{س} \to \frac{\pi}{2}^{>}}{\text{نها}} \text{ تجب}2\text{س} = -1 \\ \underset{\text{س} \to \frac{\pi}{2}^{>}}{\text{نها}} \text{ تجب س} = 0^{+} \end{cases}$$
ومنه $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{2}^{>}}{\text{نها}}$ تا(س) = −∞

كذلك $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}^{<}} \text{تجب}2س = -1 \\ \text{و منه } \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}^{<}} \text{تجب}\, س = 0^{-} \end{array}\right.$ ومنه $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}^{<}} \text{تا}(س) = +\infty$

• الاستمرار والاشتقاق :

الدالة تا هي حاصل قسمة دالتين مستمرتين على ح، حيث تجب س $\neq 0$

مهما كان س من ف$_{\text{تا}}$. ومنه الدالة تا قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ، \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ، \pi[$. ويكون :

$$\text{تا}'(س) = \left(\frac{\text{تجب}2س}{\text{تجب}س}\right)' = \frac{(\text{تجب}2س)'.\text{تجب}س - (\text{تجب}س)'.\text{تجب}2س}{\text{تجب}^2 س}$$

$$\text{تا}'(س) = \frac{(-2\text{جب}\,2س).\text{تجب}س + \text{جب}س.(\text{تجب}2س)}{\text{تجب}^2 س}$$

$$\text{تا}'(س) = \frac{-4\text{جب}\,س.\ \text{تجب}^2 س + \text{جب}\,س(\text{تجب}^2 س - \text{جب}^2 س)}{\text{تجب}^2 س}$$

$$\text{تا}'(س) = \frac{-4\text{جب}\,س.\ \text{تجب}^2 س + \text{جب}\,س.\ \text{تجب}^2 س - \text{جب}^3 س}{\text{تجب}^2 س}$$

$$\text{تا}'(س) = \frac{-3\text{جب}\,س.\ \text{تجب}^2 س - \text{جب}^3 س}{\text{تجب}^2 س}$$

$$= -\text{جب}س\left[\frac{3\,\text{تجب}^2 س + \text{جب}^2 س}{\text{تجب}^2 س}\right] .\ \text{إذن } \text{تا}'(س) = -\text{جب}\,س\left[3 + \text{ظل}^2 س\right]$$

• دراسة إشارة العدد تا$'$(س) على المجال ل$'$:

لدينا تا$'$(س) = 0 $\Leftrightarrow$ $-$جب س (3 + ظل^2 س) = 0

$\Leftrightarrow$ $-$جب س = 0 أي جب س = 0 . (لأن 3+ظل^{2}س$\neq 0$).

$\Leftrightarrow$ س = 0 أو س = π .

ومنه : $\forall$ س $\in$ $]0 ، \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ، \pi[$: تاَ(س) $\neq 0$ وإشارته تتعلق بإشارة العدد (− جب س) . لأن : (لأن 3 + ظل^{2}س) مجموع مربعين موجب تماما مهما كان س من $]0 ، \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ، \pi[$ وبالتالي نلاحظ ما يلي : $\forall$ س $\in$ $]0 ، \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ، \pi[$، جب س > 0 ومنه − جب س < 0 .

إذن : $\forall$ س $\in$ $]0 ، \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ، \pi[$، تاَ(س) < 0 . فالدالة تا متناقصة على المجالين $]0 ، \frac{\pi}{2}[$ وَ $]\frac{\pi}{2} ، \pi[$.

- **جدول التغيرات :**

س	0		$\frac{\pi}{2}$		π
تاَ(س)		−	‖	−	
تغيرات تا	$+1$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ -1

لرسم المنحني (γ) نلاحظ من خلال دراسة النهايات أن $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}^{>}}$ تا(س) $= +\infty$ و

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}^{<}}$ تا(س) $= -\infty$

نستنتج أن المنحني (γ) هو فرع لا نهائي في جوار س $= \frac{\pi}{2}$ ، ويتبع مستقيماً مقاربًا عمودياً معادلته س $= \frac{\pi}{2}$.

* نقاط تقاطع المنحني (γ) مع حاملي المحورين :

نقطة تقاطع المنحني (γ) مع حامل محور التراتيب :

بما أن $0 \in]0 ، \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ، \pi[$، فإن النقطة هي أ(0 ، تا(0))

أي أ (0 ، 1) .

نقط تقاطع المنحني (γ) مع حامل محور الفواصل :

لأجل ذلك نضع : ع = 0 أي تا(س) = 0 .

$$\text{تا(س)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\text{تجب 2س}}{\text{تجب س}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{تجب 2س} = 0 \\ \text{وَ} \\ \text{تجب س} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{2 س} = \frac{\pi}{2} + 2\text{ك}\pi \text{ أو } \text{2 س} = -\frac{\pi}{2} + 2\text{ك}\pi \text{ ، ك} \in \text{ص} \\ \text{س} \neq \frac{\pi}{2} + 2\text{ك}\pi \text{ وَ } \text{س} \neq -\frac{\pi}{2} + 2\text{ك}\pi \text{ ، ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

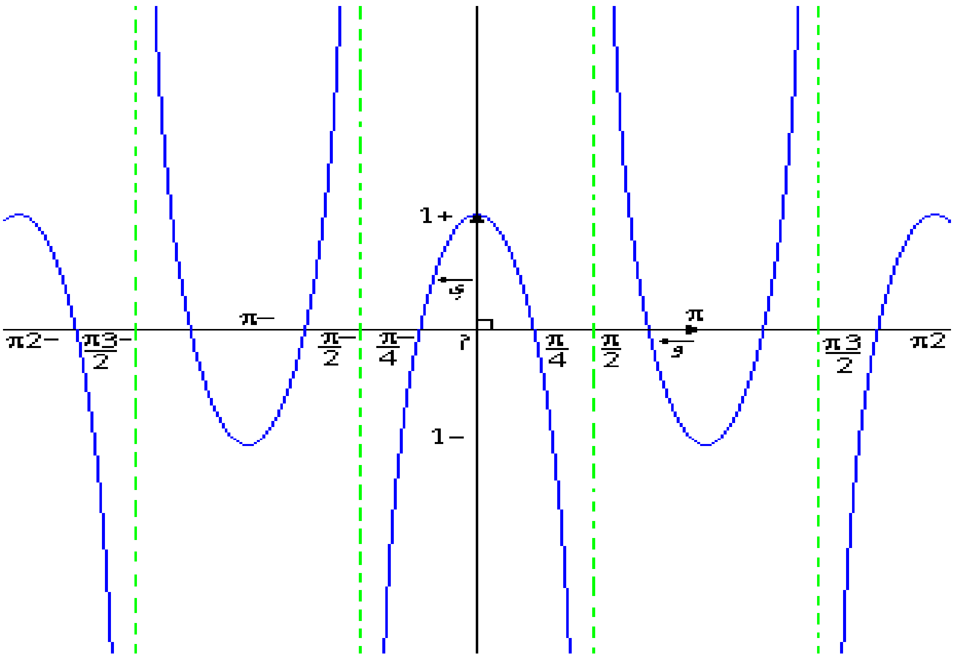
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \frac{\pi}{4} + \text{ك}\pi \text{ أو س} = -\frac{\pi}{4} + \text{ك}\pi \text{ ، ك} \in \text{ص} \\ \text{س} \neq \frac{\pi}{2} + 2\text{ك}\pi \text{ وَ } \text{س} \neq -\frac{\pi}{2} + 2\text{ك}\pi \text{ ، ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

إذن نقاط تقاطع المنحني (γ) مع حامل محور الفواصل هي النقاط التي إحداثيي كل منها ($\frac{\pi}{4}$ + كπ ، 0) أو ($-\frac{\pi}{4}$ + كπ ، 0) حيث ك $\in$ ص.

في المجال] 0 ، $\frac{\pi}{2}$ [وَ] $\frac{\pi}{2}$ ، π [، توجد نقطتان :

ن$_1$ ($\frac{\pi}{4}$ ، 0) ، ن$_2$ ($\frac{3\pi}{4}$ ، 0) .

رسم المنحني :



3 – أدرس تغيرات الدالة تا حيث :

$$تا : ح \to ح$$

$$س \mapsto تا(س) = س - جب\ س .$$

ثم أرسم المنحني (γ) الممثل للدالة تا في المستوي المنسوب لمعلم متعامد $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$

.

الحل :

● دراسة تغيرات الدالة تا :

مجموعة التعريف :

نلاحظ أن الدالة تا مجموع دالتين إحداهما الدالة الجيب والأخرى وحيد الحد معرفتين على ح إذن $ف_{تا} = ح$.

$\forall$ س $\in$ ح ، –س $\in$ ح وَ تا(–س) = –س – جب(–س)

= –س + جب س = – (س – جب س)

تا(–س) = – تا(س) .

الدالة تا فردية ومنه المبدأ م هو مركز تناظر للمنحني (γ) .

فتكتفي بدراسة الدالة على المجال [0 ، +∞ [.

الدالة تا ليست دورية لكن نلاحظ أن :

$\forall$ س $\in$ ح : تا(س + 2 π) = (س + 2 π) – جب (س + 2 π) .

= س+2 π–جب س (لأن جب (س+2π) = جب س)

= س – جب س + 2π

تا(س + 2π) = تا(س) + 2 π .

ومنه ليكن س عدد حقيقي كيفي من ف ، ن وَ نَ نقطتان من المنحني (γ) ذات الفاصلتين س وَ س + 2π على الترتيب. إذن نجد ن(س ، تا(س)) وَ نَ (س + 2 π ، تا(س) + 2 π) و بالتالي تكون مركبتي الشعاع $\overrightarrow{ن نَ}\begin{pmatrix}2\pi \\ 2\pi\end{pmatrix}$ ومنه نستنتج أن نَ = $ت_{\vec{ق}}$(ن)

حيث $\vec{ق}\begin{pmatrix}2\pi \\ 2\pi\end{pmatrix}$ أي نَ هي صورة النقطة ن بواسطة الانسحاب $ت_{\vec{ق}}$ الذي شعاعه $\vec{ق}$.

ليكن ك من ص (ص مجموعة الأعداد الصحيحة) وَ($\gamma_{ك}$) مجموعة النقط ن من

المنحني (γ) حيث فواصلها تنتمي إلى المجال [2كπ ، 2 (ك + 1) π [نجد ما يلي : $\forall$ ك $\in$ ص : $\gamma_{ك+1} = ت_{\overleftarrow{ق}} \left(\gamma_{ك}\right)$ / $\overleftarrow{ق} \begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$.

ولهذا ندرس الدالة تا على المجال [0 ، π] ونكمل رسم المنحني (γ) بالتناظر بالنسبة للمبدأ م أولا ثم بالانسحاب الذي شعاعه $\overleftarrow{ق} \begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$

- الاستمرار والاشتقاق :

بما أن الدالة تا مجموع دالتين كلتاهما مستمرة وقابلة للاشتقاق على ح فإن الدالة تا مستمرة على المجال [0 ، π] وقابلة للاشتقاق على] 0 ، π [حيث : تاَ(س) = 1 − تجب س .

- دراسة إشارة العدد تاَ(س) :

لدينا تاَ(س) = 0 $\Leftrightarrow$ 1 − تجب س = 0

$\Leftrightarrow$ تجب س = 1

$\Leftrightarrow$ س = 2 ك π حيث ك $\in$ص.

كذلك : $\forall$ س $\in$ ح − { 2 ك π ، ك $\in$ص} ، −1 < تجب س < 1

ومنه 1 > − تجب س > −1 (بضرب الأطراف في −1).

نجد 2 > 1 − تجب > 0 (بإضافة 1 لكل طرف) .

أي 2 > تاَ(س) > 0 فالدالة تا متزايدة تماماً على المجال [0 ، π]

- جدول التغيرات :

س	0		π
تاَ(س)	0	+	+2
تغيرات تا	0	$\nearrow$	π

- رسم المنحني (γ) :

لدينا تاً(س) = جب س ومنه تاً(س) = 0 $\Leftrightarrow$ جب س = 0 أي س = ك π

حيث ك ∋ ص. تا′(س) يغير الإشارة في جوار س = كπ وينعدم إذن كل نقطة فاصلتها س = كπ حيث ك ∋ صوهي نقطة انعطاف للمنحني (γ) .

• لاحظ $\lim\limits_{س\to+\infty} تا(س) = \lim\limits_{س\to+\infty}(س-جب\,س) = +\infty$.

(لأن $\lim\limits_{س\to+\infty} س = +\infty$ بينما $-1 \leq \lim\limits_{س\to+\infty} جب\,س \leq 1$ أي محدودة) .

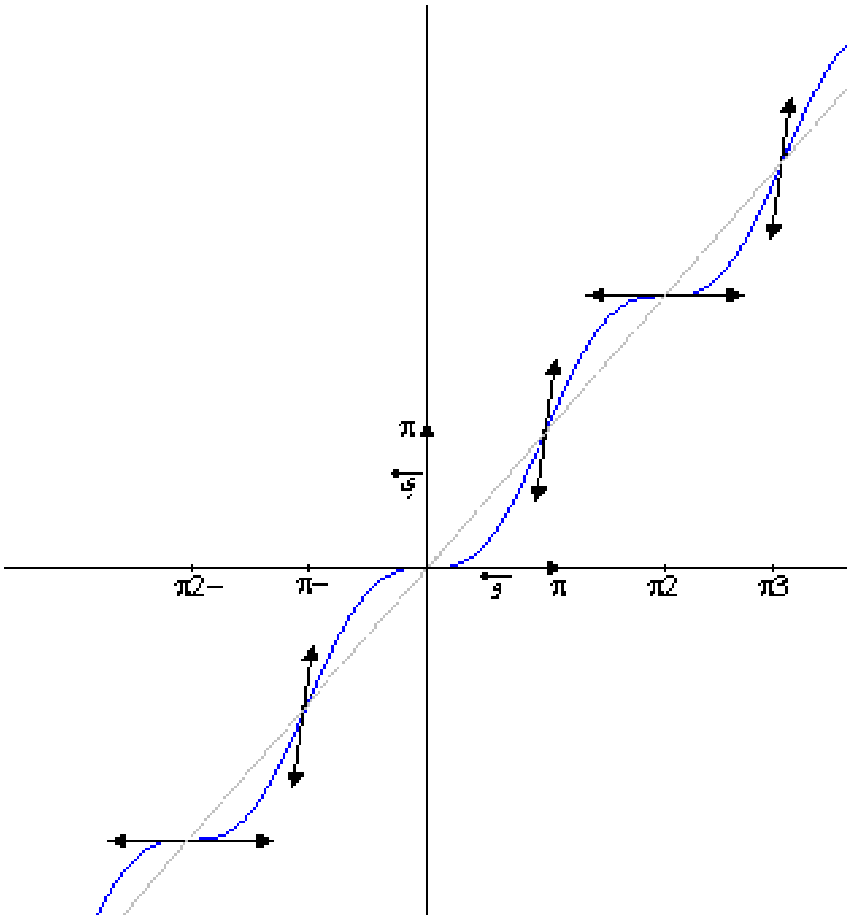
و $\lim\limits_{س\to+\infty}\dfrac{تا(س)}{س} = \lim\limits_{س\to+\infty}\dfrac{س-جب\,س}{س} = \lim\limits_{س\to+\infty}\left(1-\dfrac{جب\,س}{س}\right) = 1$

(لأن $-1 \leq \lim\limits_{س\to+\infty} جب\,س \leq +1$ محدودة و $\lim\limits_{س\to+\infty} س = +\infty$) .

أما $\lim\limits_{س\to+\infty}\left(تا(س)-س\right) = \lim\limits_{س\to+\infty} جب\,س$. ليس لها نهاية .

إذن المنحني (γ) لا يقبل مستقيماً مقاربا مائلا، لكن المنحني (γ) فرع لا نهائي منحناه المستقيم الذي معادلته ع = س وهو المنصف الأول .

رسم المنحني :



فهرس السلسلة 3

تتضمن هذه السلسلة درسا واحدا هو :

- التناظر العمودي.
- الانسحاب.
- الدوران.
- التحاكي.
- تساوي القياس.
- التشابه.
- تمثيل التحويلات في المستوي المركب.

التناظر العمودي

- **الهدف من الدرس :** التعرّف على تحويل نقطي بسيط هام وذو تطبيقات عملية واسعة.
- **المدة اللازمة لدارسته :** 05 ساعات.
- **الدروس الواجب مراجعتها :**
  * مقدمة في التحويلات النقطية.
  * الجداء السّلمي.
  * المستقيمات في المستوي.
- **المراجع :** كتاب الرياضيات 3 ث / ع + ر المعهد التربوي الوطني.

تصميم الدرس

- تمهيد.

1 - تعريف التناظر العمودي.

2 - خواص التناظر العمودي.

3 - تركيب تناظرين حول مستقيمين متعامدين.

4 - العبارة التحليلية للتناظر.

5 - تمارين التصحيح الذاتي.

6 - الأجوبة.

تمهيد :

إن عنصر التناظر في الهندسة له دور كبير وسنهتم فيما يلي بدراسة التناظر حول مستقيم آخذين بعين الاعتبار أن الطالب درَس سابقا التناظر وخصائصه ولكننا سنجمع المعلومات القديمة في قالب رياضي جديد هندسي وتحليلي.

1- تعريف :

ليكن (ق) مستقيم في المستوي (π) ، نُسمي تناظرا عموديا بالنسبة للمستقيم (ق) التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة ن من المستوي النقطة نَ بحيث يكون المستقيم (ق) محوراً للقطعة [ن نَ].

نرمز للتحويل بالرمز $ت_ق$، ونقول أن نَ نظيرة ن بالنسبة لِـ (ق).

لاحظ أيضا أن النقطة ن نظيرة نَ بالنسبة لِـ ق أي أن :

نَ = $ت_ق$(ن) $\Leftrightarrow$ ن = $ت_ق$(نَ).

ملاحظة : بفرض هـ المسقط العمودي للنقطة ن على (ق) عندئذ يكون

$\overleftarrow{\text{هـ نَ}} = -\overleftarrow{\text{هـ ن}}$

2 - خواص التناظر العمودي :

- مقابل أي مستقيم في المستوي (π) يمكن تعريف تناظر عمودي وحيد محوره ذلك المستقيم.

ومقابل أي نقطتين أ ، ب يمكن تعريف تناظر عمودي وحيد محوره هو محور القطعة [أ ب].

- التحويل $ت_ق$ تقابل لأنه مقابل كل نقطة ن توجد نقطة وحيدة ن وهو تضامني لأن : (

$ت_ق$ o $ت_ق$) (ن) = $ت_ق$ (نَ) = ن .

مما يدل على أن : $ت_ق$ o $ت_ق$ 1_π .

النقط الصامدة وفق التحويل $ت_ق$ هي نقاط المستقيم (ق) فقط لأن :

ن صامدة $\Leftrightarrow$ $ت_ق$(ن) = ن $\Leftrightarrow$ $\overleftarrow{\text{هـ نَ}} = -\overleftarrow{\text{هـ نَ}}$

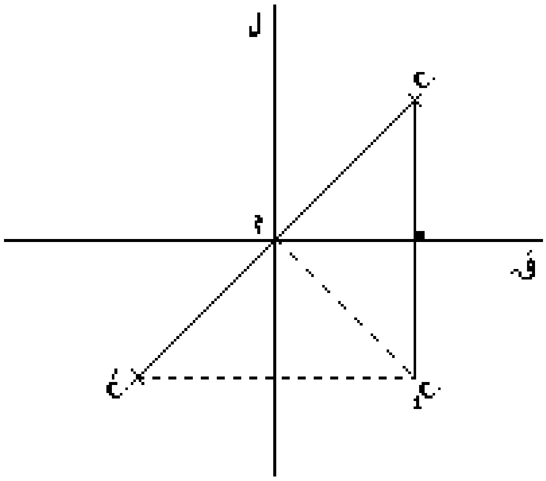
3 – تركيب تناظرين حول مستقيمين متعامدين :

ليكن المستقيمان (ق) ، (ل) بحيث :(ق) $\perp$ (ل) وَ (ق) $\cap$ (ل) = { م } .

ولنعرف التحويل : $\text{ت}_{\text{ل}}\ o\ \text{ت}_{\text{ق}} : \pi \to \pi$.

$$\underbrace{\text{ن} \xrightarrow{\text{ت}_{\text{ق}}} \text{ن}_1 \xrightarrow{\text{ت}_{\text{ل}}} \text{نَ}}_{\text{ت}_{\text{ل}}\ o\ \text{ت}_{\text{ق}}}$$

عندئذ :



$$\left\{\begin{array}{l} \overleftarrow{\text{م ن}} = \overleftarrow{\text{م ن}_1} \\ \overleftarrow{\text{م ن}_1} = \overleftarrow{\text{م نَ}} \end{array}\right. \Leftarrow \overleftarrow{\text{م ن}} - \overleftarrow{\text{م نَ}}$$

وَ ن م نَ = π .

إذن : $\overleftarrow{\text{م ن}} = -\overleftarrow{\text{م نَ}}$.

أي أن ن ، نَ متناظرتان بالنسبة للنقطة م .

فالتحويل $\text{ت}_{\text{ل}}\ o\ \text{ت}_{\text{ق}}$ هو تناظر حول النقطة م نرمز له بالرمز : $\text{ت}_{\text{م}}$.

نتيجة :

مركب تناظرين حول مستقيمين متعامدين هو تناظر حول نقطة تقاطعهما.

ملاحظات :

- $\text{ت}_{\text{ق}}\ o\ \text{ت}_{\text{ل}} = \text{ت}_{\text{ل}}\ o\ \text{ت}_{\text{ق}}$.
- $\text{ت}_{\text{م}}\ o\ \text{ت}_{\text{م}} = (\text{ت}_{\text{ق}}\ o\ \text{ت}_{\text{ل}})\ o\ (\text{ت}_{\text{ل}}\ o\ \text{ت}_{\text{ق}}) = \text{ت}_{\text{ق}}\ o\ 1_{\pi}\ o\ \text{ت}_{\text{ق}} = \text{ت}_{\text{ق}}\ o\ \text{ت}_{\text{ق}} = 1_{\pi}$.

أي أن $\text{ت}_{\text{م}}$ تضامني .

• لـن نـتطرّق فـي هذا الـبحث لدراسـة مركب تـنـاظرين حـول مـستقيمـين مـتقـاطـعين أو مـتـوازيـين وسـنـخـصّص لـه بـحـثـا آخـر .

4 - الـعبـارة الـتـحـليليـة للـتـنـاظـر الـعـمـودي :

نـنـسـب الـمـسـتـوي (π) إلـى مـعـلـم مـتـعـامـد ومـتـجـانـس (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) ونفرض (ق) هـو أحد الـمحاور الإحـداثـيـة ثـم نعمـم ذلـك.

• $ت_{م س}$: ن (س ، ع) $\longmapsfrom$ نَ (سَ ،عَ).

$$\overleftarrow{هـ نَ} + \overleftarrow{هـ ن} = \overleftarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} سَ = س \\ عَ = - ع \end{cases}$$

• $ت_{م ع}$: $\begin{cases} سَ = - س \\ عَ = ع \end{cases}$ (بنفس الطريقة).

الـحـالـة الـعـامـة : بفـرض (Δ) مـسـتـقـيم إخـتـياري مـعـادلـتـه : ا س + ب ع + جـ = 0. وشـعـاع تـوجـيـهـه $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} - ب \\ ا \end{pmatrix}$.

ولـنـعـتـبـر الـتـحـويـل : $ت_{\Delta}$: ن (س ، ع) $\longmapsfrom$ نَ (سَ ، عَ).

عـنـدئـذ : (Δ) محور القطعة [ن نَ] $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} هـ \quad \text{منـتـصـف} [ن نَ] \\ وَ \\ \overleftarrow{ن نَ} \perp \overleftarrow{ش} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{س + سَ}{2} = س_{هـ} \quad و \quad \dfrac{ع + عَ}{2} = ع_{هـ} \\ وَ \quad \overleftarrow{ن نَ} . \overleftarrow{ش} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} أ\left(\frac{س+سَ}{2}\right)+ب\left(\frac{ع+عَ}{2}\right)+جـ=0 \quad \left(\text{لأن هـ} \in (\Delta)\right) \\ -ب\,(سَ-س)+أ\,(عَ-ع)=0 \end{cases}$$

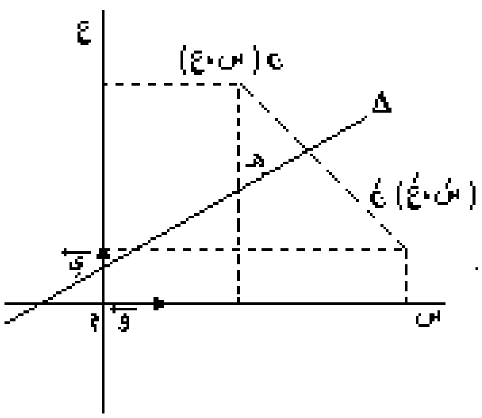
$$\Leftrightarrow \begin{cases} أسَ+ب\ عَ+أس+ب\ ع+2جـ=0 \\ -ب\ سَ+أ\ عَ+ب\ س-أ\ ع=0 \end{cases}$$

وبحل الجملة حسب طريقة المحدّد نجد :

محدّد الجملة هو : $أ^2+ب^2$ غير معدوم لأن : $\overleftarrow{ش} \neq \overleftarrow{0}$.

$$سَ=\frac{\begin{vmatrix} أس+ب\ ع+2جـ & ب \\ ب\ س-أ\ ع & أ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ب & أ \\ أ & -ب \end{vmatrix}}=\frac{(ب^2-أ^2)س-2أب\ ع-2أجـ}{أ^2+ب^2}$$

$$عَ=\frac{\begin{vmatrix} أ & أس+ب\ ع+2جـ \\ -ب & ب\ س-أ\ ع \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ب & أ \\ أ & -ب \end{vmatrix}}=\frac{-2أ\ ب\ س+(أ^2-ب^2)ع-2\ ب\ جـ}{أ^2+ب^2}$$



وبفرض $\alpha=\frac{ب^2-أ^2}{أ^2+ب^2}$ ، $\beta=\frac{-2أب}{أ^2+ب^2}$.

$\gamma=\frac{-2أجـ}{أ^2+ب^2}$ ، $\gamma'=\frac{-2أب\ جـ}{أ^2+ب^2}$.

نجد العبارة العامة للتناظر هي من الشكل :

$$\begin{cases} س' = \alpha س + \beta ع + \gamma \\ ع' = \alpha س + \beta ع + \gamma' \end{cases}$$

5 - أسئلة التصحيح الذاتي :

5 - 1 - ليكن المستوي (π) المزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(م ، \vec{و} ، \vec{ي}\right)$.
أوجد العبارة التحليلية للتناظر العمودي حول كل من المستقيمين اللذين معادلتيهما على الترتيب : س - ع = 0 ، 2 س - 3ع + 5 = 0 .

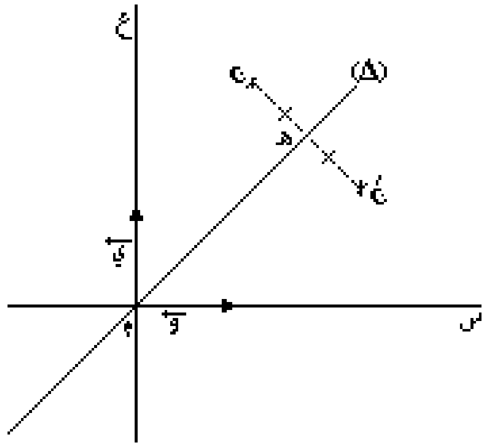
5 - 2 - ليكن المستوي (π) المزود بعلم متعامد ومتجانس $\left(م ، \vec{و} ، \vec{ي}\right)$.
وليكن التحويل ت المعرّف بالعبارتين :

$$\begin{cases} س' = ع - 1 \\ ع' = س + 1 \end{cases}$$

1 - أوجد مجموعة النقط الصّامدة وفق التحويل ت .

2 - هل التحويل ت تناظر عمودي .

6 - أجوبة التصحيح الذاتي :



6 - 1 -

• أولا (Δ) : س − ع = 0 (المنصف الأول)

شعاع توجيهه $\overleftarrow{\text{ش}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ، هـ منتصف [ن نَ]

$$\begin{cases} \text{س}_{\text{هـ}} = \dfrac{\text{س} + \text{سَ}}{2} \ ، \ \text{ع}_{\text{هـ}} = \dfrac{\text{ع} + \text{عَ}}{2} \\ \overleftarrow{\text{ن نَ}} \perp \overleftarrow{\text{ش}} \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\text{س} + \text{سَ}}{2} - \dfrac{\text{ع} + \text{عَ}}{2} = 0 & (\text{لأن هـ} \in \Delta) \\ \begin{pmatrix}\text{سَ} - \text{س}\\ \text{عَ} - \text{ع}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0 & \text{أي} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{س} + \text{سَ} - \text{ع} - \text{عَ} = 0 \\ \text{سَ} - \text{س} + \text{عَ} - \text{ع} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\,\text{سَ} - 2\text{ع} = 0 \\ 2\text{س} - 2\,\text{عَ} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{سَ} = \text{ع} \\ \text{عَ} = \text{س} \end{cases}$$ وهي العبارة التحليلية للتحويل ت_Δ .

إذن : $\text{ت}_\Delta : \text{ن}\,(\text{س} \ ، \ \text{ع}) \longmapsto \text{نَ}\,(\text{سَ} \ ، \ \text{عَ}) \ / \begin{cases} \text{سَ} = \text{ع} \\ \text{عَ} = \text{س} \end{cases}$

ثانياً : (Δ) : 2 س − 3 ع + 5 = 0 نتبع نفس الطريقة .

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{\text{س} + \text{سَ}}{2}\right) - 3\left(\dfrac{\text{ع} + \text{عَ}}{2}\right) + 5 = 0 \\ \begin{pmatrix}\text{سَ} - \text{س}\\ \text{عَ} - \text{ع}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,\text{سَ} - 3\,\text{عَ} + 2\text{س} - 3\text{ع} + 10 = 0 \\ 3\,\text{سَ} + 2\,\text{عَ} - 3\text{س} - 2\text{ع} = 0 \end{cases}$$

ولحل الجملة نتبع طريقة المحدّد :

(المجهول هو (سَ ، عَ)) .

المحدّد = (2)(2) −(3)(3) = 4 + 9 = 13 ≠ 0 فلجملة حل وحيد .

$$\text{سَ} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2\text{س} - 3\text{ع} + 10 \\ 2 & -3\text{س} - 2\text{ع} \end{vmatrix}}{13} = \frac{5\text{س} + 12\text{ع} - 20}{13}$$

$$\text{عَ} = \frac{\begin{vmatrix} 2\text{س} - 3\text{ع} + 10 & 2 \\ -3\text{س} - 2\text{ع} & 3 \end{vmatrix}}{13} = \frac{12\text{س} - 5\text{ع} + 30}{13}$$

إذن : ت_{Δ} : ن (س ، ع) ⟵ نَ (سَ ، عَ) / $\begin{cases} \text{سَ} = \frac{5}{13}\text{س} + \frac{12}{13}\text{ع} - \frac{20}{13} \\ \text{عَ} = \frac{12}{13}\text{س} - \frac{5}{13}\text{ع} + \frac{30}{13} \end{cases}$.

6 − 2 −

1 − لإيجاد النقاط الصامدة نضع : س = سَ وَ ع = عَ

$\begin{cases} \text{س} = \text{ع} - 1 \\ \text{ع} = \text{س} + 1 \end{cases}$ ومنه ع = س + 1

إذن مجموعة النقط الصامدة هي مستقيم (Δ) معادلته : س − ع + 1 = 0 وشعاع توجيهه $\vec{\text{ش}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 − حتى يكون ت تناظرًا عموديا حل (Δ) يجب أن يتحقق الشرطان :

$\begin{cases} \text{هـ منتصف القطعة [ن نَ] تنتمي إلى } (\Delta) \\ \text{وَ } \overrightarrow{\text{ن نَ}} \perp \vec{\text{ش}} \end{cases}$

لدينا : $س_{هـ} = \frac{س + سَ}{2} = \frac{س + ع - 1}{2}$

$ع_{هـ} = \frac{ع + عَ}{2} = \frac{ع + س + 1}{2}$

نعوّض في معادلة (Δ) : $\frac{س + ع - 1}{2} - \frac{ع + س + 1}{2} + 1 = 0$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$. إذن هـ $\in (\Delta)$.

- $\overleftarrow{ن نَ} . \overleftarrow{ش} = \begin{pmatrix} سَ - س \\ عَ - ع \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = ع - 1 - س - 1 + س + 1 - ع = 0$

أي أن : $\overleftarrow{ن نَ} \perp \overleftarrow{ش}$

إذن التحويل ت تناظر عمودي حول المستقيم (Δ) ذي المعادلة : س − ع + 1 = 0 .

الإنسحاب

الأهداف من الدرس :

- تطبيق هام لدرس التناظر العمودي.

- تركيب تناظرَين حول مستقيمين متوازيين.

المدة اللازمة لدراسته : 08 ساعات.

الدروس الواجب مراجعتها :

* مقدمة في التحويلات النقطية.
* الأشعة في المستوي.
* التناظر العمودي.

تصميم الدرس

- تمهيد.
- 1 - تعريف.
- 2 - خاصّة أساسية هامة.
- 3 - خواص الانسحاب.
- 4 - نظرية.
- 5 - تركيب إنسحابين.
- 6 - زمرة الانسحابات.
- 7 - العبارة التحليلية للانسحاب.
- 8 - تمارين التصحيح الذاتي.
- 9 - الأجوبة.

تـمـهـيـد :

نسـمـي شعـاعـا مقيدا في المستوي (π) كل ثنـائية نقطيـة (ب ، جـ) حيث ب بدايتـه وجـ نـهـايـتـه ونـرمـز لـه بـالـرمـز $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$.

ولنعرّف على مجموعـة الأشعـة المقيدة علاقة التسـايـر المعروفـة فنجد :

أنها علاقة تكافؤ ونرمز لكل صنف بـ $\left[\text{ب جـ}\right]$ أو $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ وندعوه شعاعا طلقا.

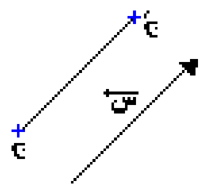
لاحظ أن كـل شعـاع يُرسم فـي الـمستـوي هـو ممـثلا لـشعـاع طـلـق واحـد أي يـمـكـن أخـذ ممـثـلا لـلشعـاع $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ فـي أي مكـان مـن الـمستـوي. (راجـع الأشـعـة فـي الـسـنـة الـثـانـيـة).

1- تـعـريـف :

لـيـكـن الـشـعـاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ فـي الـمسـتـوي (π)، نُـسـمـي الـتـحـويـل الـذي يـرفـق بـكـل نـقـطـة ن الـنـقـطـة نَ بـحـيـث : $\overleftarrow{\text{ن نَ}} = \overleftarrow{\text{ش}}$ ، إنـسـحـابـا شـعـاعـه $\overleftarrow{\text{ش}}$ ونـرمـز لـه بـالـرمـز $\text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}}$ حـيـث

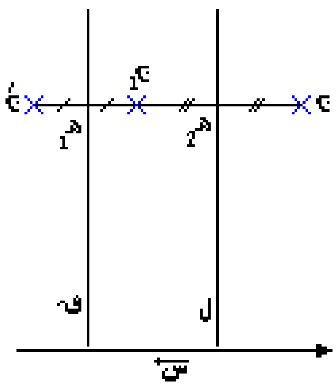
ن : π ← π : ن ↤ نَ = $\text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}}$ (ن) : $\overleftarrow{\text{ن نَ}} = \overleftarrow{\text{ش}}$.

ولإيـجـاد مـحـوّلـة نـقـطـة ن نـرسـم مـنـهـا شـعـاعـا يـسـايـر $\overleftarrow{\text{ش}}$ فـتـكـون نـهـايـتـه هـي الـنـقـطـة نَ الـمـطـلـوبـة.



2 - خـاصّـة هـامـة :

لـيـكـن الانـسـحـاب $\text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}}$ ولـيـكـن (ق) ، (ل) مستقيمان إخـتـياريـان بـحـيـث يـحـقـقـان :



$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{ق}) // (\text{ل}) \text{ ، } \overleftarrow{\text{ق}} \perp \overleftarrow{\text{ش}} \\ \text{بعد } (\text{ق}) \text{ على } (\text{ل}) \text{ هو } \dfrac{|\overleftarrow{\text{ش}}|}{2} \qquad (*) \\ \text{الإتجاه من } (\text{ق}) \text{ نحو } (\text{ل}) \text{ يوافق اتجاه الشعاع } \overleftarrow{\text{ش}} \end{array} \right.$$

عندئذ لنأخذ تركيب التناظرين حول المستقيمين (ق) ، (ل) فنجد :

$$ن \xrightarrow{ت_ق} ن_1 \xrightarrow{ت_ل} ن'$$

حيث $\overleftarrow{ن هـ_1} = \overleftarrow{هـ_1 ن_1}$ و $\overleftarrow{ن_1 هـ_2} = \overleftarrow{هـ_2 ن'}$.

وبالتالي : $\forall ن \in (\pi) : \overleftarrow{ن ن'} = \overleftarrow{ن ن_1} + \overleftarrow{ن_1 ن'} = 2\overleftarrow{هـ_1 ن_1} + 2\overleftarrow{ن_1 هـ_2}$

$$= 2\overleftarrow{هـ_1 هـ_2} = \overleftarrow{ش}$$

لأن $هـ_1 هـ_2 = \frac{|\overleftarrow{ش}|}{2}$ وهما من نفس الاتجاه .

إذن : $\forall ن \in (\pi) : \overleftarrow{ن ن'} = \overleftarrow{ش}$ هذا هو انسحاب $ن_{\overleftarrow{ش}}$.

أي أن : $ن_{\overleftarrow{ش}} = ت_ل \circ ت_ق$.

لما كان $\overleftarrow{ش}$ شعاعا طلقا يمكن أن نختار ممثلا له في أي مكان من المستوي.

لذا نعبّر عن الانسحاب بعدد غير منته من الأشكال .

***نتيجة :**

يمكن تحليل الانسحاب $ن_{\overleftarrow{ش}}$ إلى تركيب تناظرين حول مستقيمين إختياريين من المستوي يحققان (*) بعدد غير منته من الأشكال .

(يمكن إعتبار هذه النتيجة تعريفا للانسحاب).

3 - خواص الإنسحاب :

1 - الإنسحاب $ن_{\overleftarrow{ش}}$ تقابل لأنه مركب تقابلين $ت_ق$ ، $ت_ل$ إذن له تحويل عكسي

$$\left(ن_{\overleftarrow{ش}}\right)^{-1} = ت_ق^{-1} \circ ت_ل^{-1}$$

$= ت_ق \circ ت_ل$ لأن كليهما تضامني

وهذا هو تركيب تناظرين حول مستقيمين يحققان (*) مع إختلاف الإتجاه لأنه من (ل) نحو (ق).

أي أنه إنسحاب شعاعه $(-\overleftarrow{\text{ش}})$

إذن : $\left(\text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}}\right)^{-1} = \text{ن}_{-\overleftarrow{\text{ش}}}$

أو نقول $\overleftarrow{\text{ن َن}} = \overleftarrow{\text{ش}} \Leftrightarrow \overleftarrow{\text{ن نَ}} = -\overleftarrow{\text{ش}}$

وهو تعريف الشعاعي للآنسحاب : $\text{ن}_{-\overleftarrow{\text{ش}}}$

ملاحظة : حتى يكون $\text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}}$ تضامنياً يجب أن يكون :

$$\text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}}(\text{ن}) = \text{ن}^{-1}_{\overleftarrow{\text{ش}}}(\text{ن}) \Leftrightarrow \text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}}(\text{ن}) = \text{ن}_{-\overleftarrow{\text{ش}}}(\text{ن}) \Leftrightarrow \overleftarrow{\text{ش}} = -\overleftarrow{\text{ش}}$$

أي $\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{0}$

2 - النقاط الصامدة :

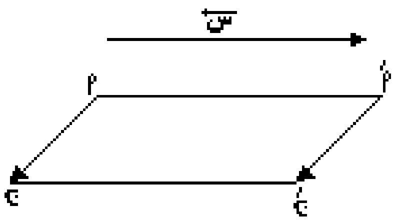
ليكن الإنسحاب $\text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}} : \pi \leftarrow \pi$.

ن نقطة صامدة $\Leftrightarrow \text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}}(\text{ن}) = \text{ن} \Leftrightarrow \overleftarrow{\text{ن ن}} = \overleftarrow{\text{ش}}$.

* إذا كان $\overleftarrow{\text{ش}} \neq \overleftarrow{0}$ فالمساواة مستحيلة ولا توجد أي نقطة صامدة.

* إذا كان $\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{0}$ فالمساواة محققة من أجل كل نقطة من (π) أي أن جميع نقاط المستوي صامدة. إذن : $\text{ن}_{\overleftarrow{0}} = 1_{\pi}$.

3 - الخاصة المميزة للآنسحاب :



ليكن الإنسحاب $\text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}}$ في المستوي (π).

وبفرض $\text{أ}' = \text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}}(\text{أ})$ أي $\overleftarrow{\text{أأ}'} = \overleftarrow{\text{ش}}$

عندئذ :

$\forall$ ن $\in (\pi)$: نَ = $\text{ن}_{\overleftarrow{\text{ش}}}(\text{ن}) = \text{ن} \Leftrightarrow \overleftarrow{\text{ن نَ}} = \overleftarrow{\text{ش}}$.

بالمقارنة نجد : $\overleftarrow{\text{أأ}'} = \overleftarrow{\text{ن نَ}}$ (أنظر الشكل)

وحسب خواص متوازي الأضلاع فإن :

$$\overleftarrow{\text{أن}} = \overleftarrow{\text{أ'نَ}}$$

أي محوّل أي شعاع بواسطة إنسحاب هو شعاع يسايره.

العكس : ليكن تحويل نُقطي ما بحيث محوّل لأي شعاع هو شعاع يُسايره. وبفرض أَ = ت (أ).

وَ ∀ ن ∋ (π) : نَ = ت (ن).

فحسب الشرط يكون : $\overrightarrow{\text{أ ن}} = \overrightarrow{\text{أَ نَ}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{ن نَ}} = \overrightarrow{\text{أ أَ}}$

ولكن $\overrightarrow{\text{أ أَ}}$ شعاع ثابت نرمز له : $\overrightarrow{\text{ش}}$.

إذن : ∀ن ∋ (π) : $\overrightarrow{\text{ن نَ}} = \overrightarrow{\text{ش}}$. فالتحويل ت هو انسحاب شعاعه.

- **النتيجة :**

الشرط اللازم والكافي ليكون التحويل ت انسحابا هو أن يكون محوّل كل شعاع $\overrightarrow{\text{أ ن}}$ هو شعاع يُسايره $\overrightarrow{\text{أَ نَ}}$. $\overrightarrow{\text{ش}}$

4 – محوّل مستقيم وفق الانسحاب هو مستقيم يوازيه.

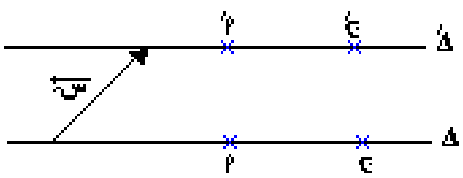
ليكن الانسحاب $\text{ن}_{\overrightarrow{\text{ش}}}$ ، بفرض (Δ) مستقيم إختياري .

وليكن $\overrightarrow{\text{ق}}$ شعاع توجيه المستقيم (Δ).

أ ∋ (Δ) : $\text{ن}_{\overrightarrow{\text{ش}}}$ (أ) = أَ.

نرسم من أَ مستقيما يوازي (Δ) وليكن (Δَ) .

عندئذ : ∀ ن ∋ (Δ) فإن : $\overrightarrow{\text{أ ن}} = \overrightarrow{\text{أَ نَ}}$



فإذا فرضنا أن نَ ∌ (Δَ) فإن $\overrightarrow{\text{أ ن}} \neq \overrightarrow{\text{أَ نَ}}$ لعدم التوازي وهذا تناقض إذن نَ ∋ (Δَ) ومنه : $\text{ن}_{\overrightarrow{\text{ش}}}$ (Δ) = (Δَ).

5 – محوّلة دائرة هي دائرة لها نفس نصف القطر.

(ينتج ذلك من خواص التناظر العمودي).

يكتفي إيجاد محوّلة المركز ثم نرسم دائرة لها نفس نصف القطر.

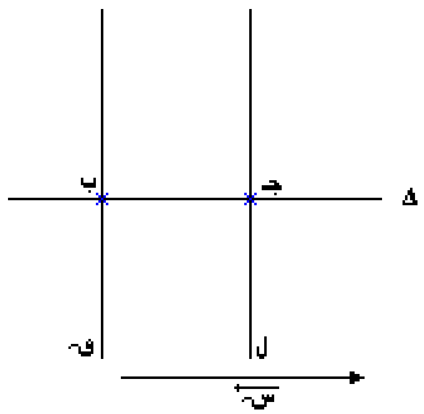
4 – نـظـريـة :

كل انسـحـاب $ن_{\overleftarrow{ش}}$ يـتحـلل إلى تـركـيب تـنـاظـرين حـول أي نـقطـتـين ب ، جـ بـحـيث :

$$\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \frac{1}{2}\overleftarrow{ش}$$

البـرهان : لنـحـلل الانسحـاب (حسـب الـخـاصـة الأسـاسـيـة 2).

$ن_{\overleftarrow{ش}} = ت_{ل} \circ ت_{ق}$



بـفـرض (Δ) مـسـتـقـيـم اخـتـيـاري يُـعـامـد (ق) وَ (ل) .

عـنـدئـذ : $(\Delta) \cap (ل) = \{جـ\}$، $(\Delta) \cap (ق) = \{ب\}$.

$ن_{\overleftarrow{ش}} = ت_{ل} \circ (ت_{\Delta} \circ ت_{\Delta}) \circ ت_{ق}$

$= (ت_{ل} \circ ت_{\Delta}) \circ (ت_{\Delta} \circ ت_{ق})$

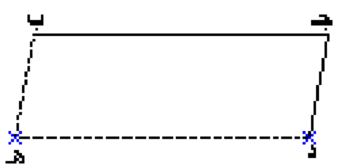
$= ت_{جـ} \circ ت_{ب}$.

إن اخـتـيـار الـنـقـطـتـين ب وَ جـ لا يـتـعـلـق بـأي شـرط سـوى : $\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \frac{1}{2}\overleftarrow{ش}$.

إذن يـمـكـن اعـتـبـار الانـسـحـاب مـركـب تـنـاظـرين حـول أي نقطـتـين اخـتـيـاريـتـين ب ، جـ (بـحـيـث : $\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \frac{1}{2}\overleftarrow{ش}$) .

بـعـدد غـيـر مـنـتـه مـن الأشـكـال .

تـمـريـن :



بـرهـن أن تـركـيـب ثـلاث تـنـاظـرات حـول ثـلاث نـقـاط هـو تـنـاظـر حـول نقـطـة.

لـنـفـرض : $ل = ت_{د} \circ ت_{جـ} \circ ت_{ب}$.

لـنـعـتـبـر الانـسـحـاب $ن_{2\overleftarrow{\text{ب جـ}}} = ت_{جـ} \circ ت_{ب}$

وبمـا أنه يمـكـن إخـتـيـار أي نـقـطـتـين .

لـذا نـخـتـار نـقـطـتـين ثـانـيـهـمـا د والأخـرى هـ بـحـيث :

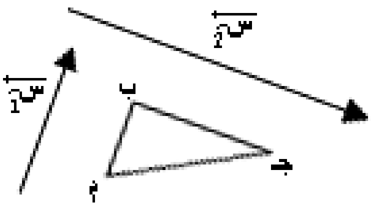
$\overrightarrow{\text{هـ د}} = \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ومنه : $ن_{2\overrightarrow{\text{ب جـ}}} = ت_{جـ} \circ ت_{ب} = ت_{د} \circ ت_{هـ}$.

نعوّض في عبارة ل فنجد : $ل = ت_{د} \circ (ت_{د} \circ ت_{هـ}) = (ت_{د} \circ ت_{د}) \circ ت_{هـ} = ت_{هـ}$.

• **نتيجة** : مركب إنسحاب مع تناظر مركزي أو العكس هو تناظر مركزي حول نقطة جديدة .

ينتج ذلك من التمرين مباشرة لأن : $ت_{د} \circ ت_{جـ}$ هو الانسحاب $ن_{\overrightarrow{\text{جـ د}}}$. كذلك $ت_{جـ} \circ ت_{ب}$ هو الانسحاب $ن_{2\overrightarrow{\text{ب جـ}}}$.

5 – تركيب انسحابين :



ليكن الانسحابين $ن_{\overrightarrow{ش_1}}$ ، $ن_{\overrightarrow{ش_2}}$ في المستوي (π).

نحلل كلا منهما إلى تركيب تناظرين حول نقطتين إختياريتين

تحققان الشروط المعروفة.

ولنختر إحدى النقاط مشتركة بينهما أي :

$ن_{\overrightarrow{ش_1}} = ت_{ب} \circ ت_{م}$ ، $ن_{\overrightarrow{ش_1}} = ت_{جـ} \circ ت_{ب}$ حيث :

$2\overrightarrow{\text{م ب}} = \overrightarrow{ش_1}$ ، $2\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{ش_2}$ ولنركبهما .

$$ن_{\overrightarrow{ش_2}} \circ ن_{\overrightarrow{ش_1}} = (ت_{جـ} \circ ت_{ب}) \circ (ت_{ب} \circ ت_{م}) = ت_{جـ} \circ I_{\pi} \circ ت_{م} = ت_{جـ} \circ ت_{م}$$

وهذا التحويل هو انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{\text{م جـ}}$.

ولكن $2\overrightarrow{\text{م جـ}} = 2\left(\overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}}\right) = 2\overrightarrow{\text{م ب}} + 2\overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{ش_1} + \overrightarrow{ش_2}$.

أي أن تركيب انسحابين هو انسحاب شعاعه مجموع شعاعيهما .

فنكتب : $ن_{\overrightarrow{ش_1}} \circ ن_{\overrightarrow{ش_2}} = ن_{\overrightarrow{ش_1} + \overrightarrow{ش_2}}$.

6 – زمرة الانسحابات :

بفرض سح مجموعة الانسحابات في المستوي (π) ولنعرّف عليها العملية o عندئذ :

1 – o عملية داخلية (تركيب انسحابين هو إنسحاب) .

2 – o عملية تبديلية لأن : $\forall \left(\overrightarrow{ن}_{ش_1} ، \overrightarrow{ن}_{ش_2} \right) \ni سح^2$

فإن : $ن_{\overrightarrow{ش_2}} \, \text{o} \, ن_{\overrightarrow{ش_1}} = ن_{\overrightarrow{ش_1}+\overrightarrow{ش_2}} = ن_{\overrightarrow{ش_2}+\overrightarrow{ش_1}} = ن_{\overrightarrow{ش_1}} \, \text{o} \, ن_{\overrightarrow{ش_2}}$

3 – o عملية تجميعية : لأن الجمع الشعاعي تجميعي.

$$\forall \left(ن_{\overrightarrow{ش_1}} ، ن_{\overrightarrow{ش_2}} ، ن_{\overrightarrow{ش_3}} \right) \ni سح^2 : ن_{\overrightarrow{ش_1}} \, \text{o} \left(ن_{\overrightarrow{ش_2}} \, \text{o} \, ن_{\overrightarrow{ش_3}} \right) = \left(ن_{\overrightarrow{ش_1}} \, \text{o} \, ن_{\overrightarrow{ش_2}} \right) \text{o} \, ن_{\overrightarrow{ش_3}}$$

4 – التحويل $ن_{\overrightarrow{0}}$ هو عنصر حيادي لأن :

$$\forall ن_{\overrightarrow{ش}} \ni سح : ن_{\overrightarrow{ش}} \, \text{o} \, ن_{\overrightarrow{0}} = ن_{\overrightarrow{ش}+\overrightarrow{0}} = ن_{\overrightarrow{ش}}$$

5 – لكل انسحاب $ن_{\overrightarrow{ش}}$ من سح نظير هو الانسحاب $ن_{-\overrightarrow{ش}}$ حيث ($ن_{\overrightarrow{ش}} \ni$ سح) .

لأن : $ن_{\overrightarrow{ش}} \, \text{o} \, ن_{-\overrightarrow{ش}} = ن_{\overrightarrow{ش}+(-\overrightarrow{ش})} = ن_{\overrightarrow{0}} = I_{\pi}$

النتيجة :

عملية التركيب (o) تعطي المجموعة سح بنية زمرة تبديلية. ندعوها زمرة الانسحابات ونرمز لها :(سح ،o).

7 – العبارة التحليلية للانسحاب :

لننسب المستوي (π) إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(م ، \overrightarrow{و} ، \overrightarrow{ي}\right)$.

وليكن : $ن_{\overrightarrow{ش}}$: (π) ← (π).

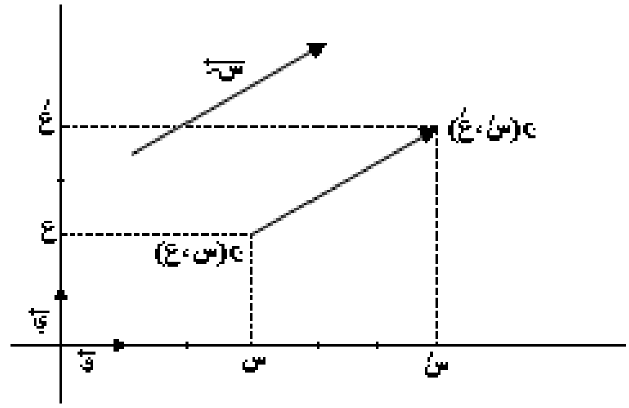
ن (س ، ع) ↤ نَ (سَ ، عَ) حيث $\overrightarrow{ن نَ} = \overrightarrow{ش}$.

وبفرض $\overrightarrow{\text{ش}}\begin{pmatrix}\text{أ}\\ \text{ب}\end{pmatrix}$

لدينا : $\overrightarrow{\text{م ن}'} - \overrightarrow{\text{م ن}} = \overrightarrow{\text{ش}}$.

وبإسقاط هذه العلاقة نجد :

$$\begin{cases} \text{س}' = \text{س} + \text{أ} \\ \text{ع}' = \text{ع} + \text{ب} \end{cases}$$



8 - تمارين التصحيح الذاتي :

8 - 1 - أثبت بالاعتماد على الأشعة أن كل إنسحاب $\text{ن}_{\overrightarrow{\text{ش}}}$ هو تركيب تناظرين حول نقطتين إختياريتين ب ، جـ تحققان : $\overrightarrow{\text{ش}} = 2\overrightarrow{\text{ب جـ}}$.

8 - 2 - ليكن المستوي (π) المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(\text{م}، \overrightarrow{\text{و}}، \overrightarrow{\text{ي}})$ ولتكن النقاط: أ(1، 2) ، ب(0، 3) ، جـ (−1، 3).

1 - أوجد العبارة التحليلية للتحويلات : $\text{ت}_{\text{أ}}$، $\text{ت}_{\text{ب}}$ ، $\text{ت}_{\text{جـ}}$.

2 - أعط العبارة التحليلية للتحويلات :

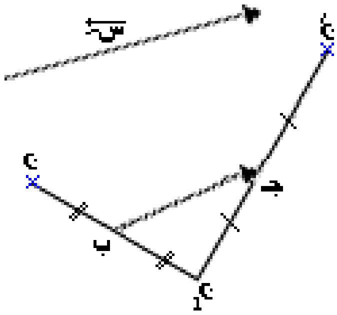
$\text{ت}_{\text{أ}} o \text{ت}_{\text{ب}}$ ، $\text{ت}_{\text{أ}} o \text{ت}_{\text{جـ}}$ ، $\text{ل} = (\text{ت}_{\text{أ}} o \text{ت}_{\text{ب}}) o \text{ت}_{\text{جـ}}$.

9 – أجوبة التصحيح الذاتي :

9 – 1 – ليكن $ن_{\overrightarrow{\text{ش}}}$ ولنفرض في المستوي (π) النقطتين ب ، جـ بحيث :

$\overrightarrow{\text{ش}} = 2\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ عندئذ :

$$ن \xrightarrow{ت_{ب}} ن_1 \xrightarrow{ت_{جـ}} نَ$$



أي $\overrightarrow{\text{ب}\,ن_1} = -\overrightarrow{\text{ب}\,ن} \Leftarrow \overrightarrow{\text{ب}\,ن_1} = \overrightarrow{\text{ن ب}}$.

$\overrightarrow{\text{جـ نَ}} = -\overrightarrow{\text{جـ}\,ن_1} \Leftarrow \overrightarrow{\text{جـ نَ}} = \overrightarrow{ن_1\,\text{جـ}}$

ولكن $\overrightarrow{\text{ن نَ}} = \overrightarrow{\text{ن ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ نَ}}$

$= \overrightarrow{\text{ب}\,ن_1} + \overrightarrow{ن_1\,\text{جـ}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

$= \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + 2\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

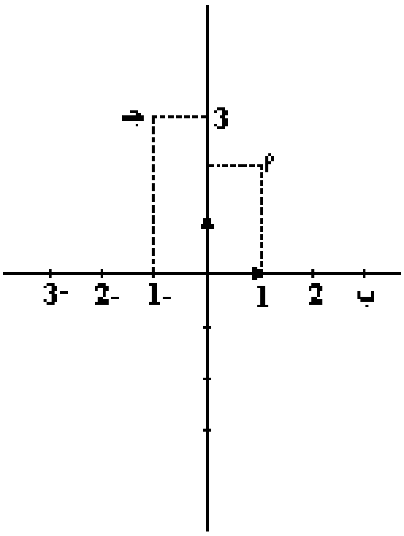
وهو شعاع ثابت .

فالتحويل $ت_{جـ} \circ ت_{ب}$ هو إنسحاب $ن_{2\overrightarrow{\text{ب جـ}}}$.

9 – 2 – أ (1، 2)، ب (0، 3) ، جـ (−3، 1) .

1 – التحويل : تم : $(\pi) \leftarrow (\pi)$.

ن (س ، ع) $\longmapsto$ نَ (سَ ، عَ) .



بحيث $\overrightarrow{\text{أ ن}} = -\overrightarrow{\text{أ نَ}}$

وبالاسقاط : $\begin{cases} سَ - 1 = -(س - 1) \\ عَ - 2 = -(ع - 2) \end{cases}$

أي : $\begin{cases} سَ = -س + 2 \\ عَ = -ع + 4 \end{cases}$

التحويل $ت_{ب}$ يُحقق : $\overrightarrow{\text{ب ن}} = -\overrightarrow{\text{ب ن}}$. فنجد :

$$\begin{cases} \text{س}' - 0 = -(\text{س} - 0) \\ \text{ع}' - 3 = -(\text{ع} - 3) \end{cases} \text{أي} \begin{cases} \text{س}' = \text{س} \\ \text{ع}' = -\text{ع} + 6 \end{cases}$$

بنفس الطريقة نجد أن :

$$\text{ت}_{\text{جـ}} : \text{ن}\,(\text{س} \,،\, \text{ع}) \mapsto \text{ن}'\,(\text{س}' \,،\, \text{ع}') \;/\; \begin{cases} \text{س}' = -\text{س} + 2 \\ \text{ع}' = -\text{ع} + 6 \end{cases}$$

2 − التحويل : $\text{ت}_{\text{أ}} \circ \text{ت}_{\text{ب}} : \pi \to \pi$.

$$\text{ن}\,(\text{س}،\text{ع}) \xrightarrow{\text{ت}_{\text{ب}}} \text{ن}_1\,(\text{س}_1،\text{ع}_1) \xrightarrow{\text{ت}_{\text{أ}}} \text{ن}'\,(\text{س}'،\text{ع}')$$

$$\begin{cases} \text{س}_1 = -\text{س} \\ \text{ع}_1 = -\text{ع} + 6 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \text{س}' = -\text{س}_1 + 2 \\ \text{ع}' = -\text{ع}_1 + 4 \end{cases}$$

وبالتعويض نجد : $\begin{cases} \text{س}' = \text{س} + 2 \\ \text{ع}' = \text{ع} - 2 \end{cases}$ وهو إنسحاب شعاعه $\overrightarrow{\text{ش}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

ولتعيين التحويل $\text{ت}_{\text{أ}} \circ \text{ت}_{\text{جـ}}$ نعتمد طريقة أخرى .

لدينا (حسب النظرية 4) تركيب تناظرين حول نقطتين متمايزتين هو انسحاب .

أي أن : $\text{ت}_{\text{أ}} \circ \text{ت}_{\text{جـ}} = \text{ن}_{2\overrightarrow{\text{جـأ}}}$.

ولكن $\overrightarrow{\text{جـأ}} \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \end{pmatrix}$ أي $2\overrightarrow{\text{جـأ}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

وحسب تعريف العبارة التحليلية للانسحاب فإن : $\begin{cases} \text{س}' = \text{س} + 4 \\ \text{ع}' = \text{ع} - 2 \end{cases}$

فالتحويل $\text{ت}_{\text{أ}} \circ \text{ت}_{\text{جـ}}$ هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{\text{ش}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

• من أجل ل = $(\text{ت}_{\text{أ}} \circ \text{ت}_{\text{ب}}) \circ \text{ت}_{\text{جـ}}$ نترك للطالب البرهان التحليلي. وسنبرهن بالاعتماد على التركيب فنقول لدينا الانسحاب :

تم o تب = تهـ o تجـ حيث $\overleftarrow{ب أ}$ = $\overleftarrow{جـ هـ}$

وبالإسقاط نجد : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س_{هـ} + 1 \\ ع_{هـ} - 3 \end{pmatrix}$

أي : $\left\{ \begin{array}{l} س_{هـ} + 1 = 1 \\ ع_{هـ} - 3 = -1 \end{array} \right.$ و منه هـ (0 ، 2)

نعوض في ل فنجد :

ل = (تهـ o تجـ) o تجـ = تهـ

فالتحويل ل هو تناظر حول النقطة (0 ، 2) .

الـــدوران

مـلاحـظـة : سـوى الـعـنـصـر الـذي هـو مـقـرر لـتـلامـيـذ شـعـبـة عـلـوم الـطـبـيـعـة والـحـيـاة.

الـهـدف من الـدرس : تـطـبـيـق عـلـى تـركـيـب الـتـنـاظـرات الـعـمـوديـة.

الـمـدة الـلازمــة لـدارسـتـــه : 08 ســـاعـات.

الـدروس الـواجـب مـراجـعـتـهـا :

* الـزوايـا والـمـسـتـقـيـمـات.
* الـتـنـاظـر الـعـمـودي.
* الإنـسـحـاب.

الـمـراجـع : كـتـاب الـريـاضـيـات 3 ث /ع +ر الـمـعـهـد الـتـربـوي الـوطـنـي.

تـصـمـيـم الـدرس

- تـمـهـيـد.

1 - تـعـريـف الـدوران.

2 - خـواص الـدوران.

3 - إنـشـاء مـركـز الـدوران.

4 - تـركـيـب دورانـيـن.

5 - تـركـيـب دوران و إنـسـحـاب.

6 - الـعـبـارة الـتـحـلـيـلـيـة لـلـدوران.

7 - تـمـاريـن الـتـصـحـيـح الـذاتـي.

8 - الأجـوبـة.

تـمـهـيـد :

ليكن (ق) وَ (ل) مستقيمان متقاطعان في النقطة م. وبفرض (ق ، ل) $\equiv \theta$ [2 π] .

و لنعيّن مركب التناظرين ت$_{ق}$ وَ ت$_{ل}$.

أ $\xleftarrow{\;ت_{ل}\;}$ أ$_1$ $\xleftarrow{\;ت_{ق}\;}$ أ

↑ ←――― ت$_{ل}$ o ت$_{ق}$ ―――↑

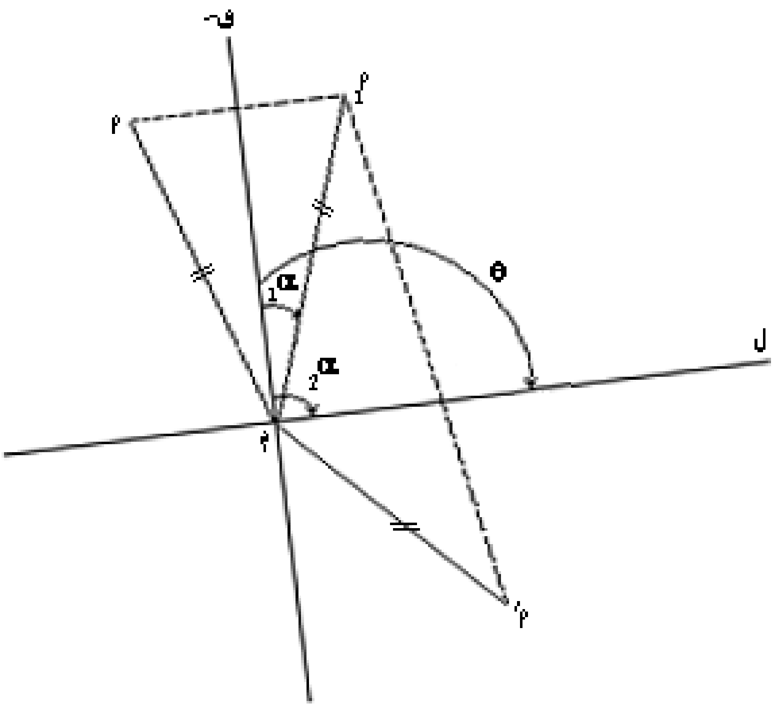
نعتبر التحويل ر = ت$_{ل}$ o ت$_{ق}$ أي ر (أ) = أَ

حسب خواص التناظر العمودي يكون لدينا :

- (م أ = م أ$_1$ وَ م أ$_1$ = م أَ) ⇐ م أ = م أَ .
- أ م أَ = ($\overleftarrow{م أ}$ ، $\overleftarrow{م أَ}$) = ($\overleftarrow{م أ}$ ، $\overleftarrow{م أ_1}$) + ($\overleftarrow{م أ_1}$ ، $\overleftarrow{م أَ}$) = $2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\theta$.

حيث : $\alpha_1 + \alpha_2 = \theta$ (حسب الشكل) .

نسمي هذا التحويل النقطي الجديد " دوران "



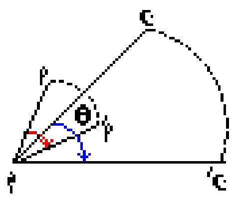
1 – تعريف :

لتكن م نقطة ثابتة في المستوي، θ زاوية موجهة. نسمي دورانا مركزه م و زاويته θ التحويل النقطي الذي يحوّل النقطة ن إلى النقطة نَ بحيث :

$$\begin{cases} م ن = م نَ \\ \left(\overrightarrow{م ن} ، \overrightarrow{م نَ}\right) = \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

ونرمز لهذا التحويل بالرمز : ر (م، θ) .

ولإيجاد محوّلة نقطة ن وفق هذا الدوران، نرسم قوسا من دائرة مركزها م قياسه θ.
فتكون نهايته هي النقطة نَ .
لاحظ الشكل ومحوّلة النقطة ا وفق نفس الدوران .



نتيجة هامة :

من خلال التعريف نلاحظ أنه يمكن التعبير عن الدوران ر (م، θ) كتركيب تناظرين عموديين حول مستقيمين إختياريين متقاطعين في النقطة م .
وقيس الزاوية بينهما يساوي $\frac{\theta}{2}$ ، وذلك بعدد غير منته من الحالات. أي أن أحد المستقيمين اختياري والآخر يصنع معه الزاوية المعطاة $\frac{\theta}{2}$.

2 – خواص الدوران :

- الدوران هو مركب تناظرين عموديين أي مُركب تقابلين فهو تقابل وبالتالي له تحويل عكسي هو $ر^{-1}$ حيث : $ر^{-1} = \left(ت_{ل} \circ ت_{ق}\right)^{-1} = ت_{ق}^{-1} \circ ت_{ل}^{-1} = ت_{ق} \circ ت_{ل}$

(لأن التناظر العمودي تضامني)

وهو دوران مركزه م وزاويته 2 (ل ، ق) = -2 (ق ، ل) = $-\theta$.

• الدوران هو مركب تناظرين عموديين فهو يحقق جميع خواص التناظر العمودي .

مثلا :

– محوّل مستقيم هو مستقيم .

– محوّلة زاوية س ٲ ع هي زاوية سَ ٲَ عَ تقايسها .

– محوّلة دائرة د (ω ، نق) هي دائرة دَ (ωَ ، نقَ). وهكذا...

• مركز الدوران هو النقطة الصامدة الوحيدة وفق الدوران (عندما $\theta \neq 0$ [2π]) لأنه بفرض ن نقطة صامدة أخرى، عندئذ وطبقا للتعريف يكون :

$\left(\overleftarrow{\text{م ن}} ، \overleftarrow{\text{م نَ}}\right) \equiv \theta$ [2π] يعني $0 \equiv \theta$ [2π] و هذا تناقض .

إذن النقطة ن ليست صامدة .

أما إذا كانت : $\theta \equiv 0$ [2π] فإن : ر (م ، θ) = I_π

لأن جميع نقاط المستوي صامدة في هذه الحالة.

• الزاوية بين مستقيم ومحوّلة هي زاوية الدوران أي

$(\Delta ، \acute{\Delta}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

نرسم مستقيما (ل) مارًا من النقطة م ويعامد (Δ) فيٲ.

وبفرض لَ = ر (ل) فإن لَ يشمل النقطة ٲَ

ولكن $\left(\overleftarrow{\text{م ٲ}} ، \overleftarrow{\text{م ٲَ}}\right) \equiv \theta$ [2π].

إذن (ل ، لَ) $\equiv \theta$ [2π].

ولكن (Δ) مستقيم مار منٲ ويعامد ل

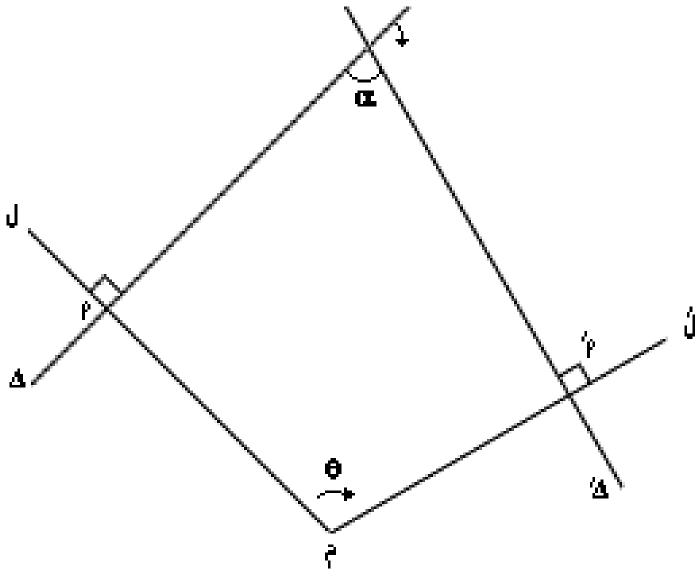
إذن : ($\acute{\Delta}$) يمر من ٲَ ويعامد لَ

إذن نرسم ($\acute{\Delta}$) كمستقيم مار منٲَ ويعامد لَ .

وبما أن الشكل رباعي : $\hat{\text{ٲ}} = \hat{\text{ٲَ}} = \frac{\pi}{2}$.

إذن : $\hat{\text{م}} + \hat{\alpha} = \pi$. أي أن $\hat{\alpha}$ تكمل θ وَ $\hat{\alpha}$ تكمل $\widehat{(\Delta ، \acute{\Delta})}$.

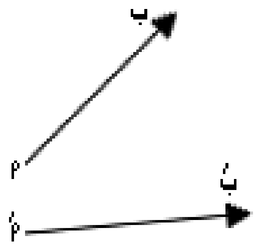
إذن : $(\Delta ، \acute{\Delta}) \equiv \theta\ [2\pi]$.



الخاصّة المميزة للدوران :

نستنتج من الخاصة السابقة أنه :

من أجل كل نقطتين أ ، ب من المستوي (π) لدينا :



$$\left\{\begin{array}{l} أ \xrightarrow{ر} أ' \\ ب \xrightarrow{ر} ب' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} أب = أ'ب' \\ \left(\overrightarrow{أب} ، \overrightarrow{أ'ب'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{array}\right.$$

فكل دوران يحقق هذين الشرطين والعكس صحيح فكل تحويل يحقق هذين الشرطين يكون دورانا زاويته θ ومركزه النقطة الصامدة .(برهان العكس خارج البرنامج) .

- إذا كانت $\theta = \pi$ فإن ر (م ،θ) = $ت_ل \circ ت_ق$ حيث ق $\perp$ ل

وهو تناظر مركزي بالنسبة للنقطة م .

إذن : ر (م ، π) = $ت_م$

5 - إنشاء مركز الدوران :

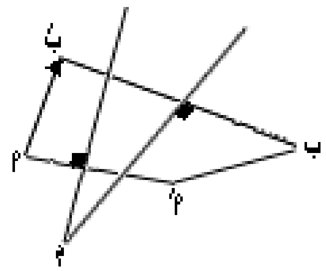
بفرض ر (م ، θ) دوران و لتكن (أ ، ب) ثنائية نقطية معلومة يكون لدينا : ر (أ) = أ' وَ ر (ب) = بَ .

وبالتالي : م أ = م أ' $\Leftarrow$ م $\ni$ محور القطعة [أأ'] .

وَم ب = م بَ $\Leftarrow$ م $\ni$ محور القطعة [ب بَ] .

وهذا يعني أن النقطة م هي نقطة تقاطع محوري القطعتين [أأَ] ، [ب بَ].

أنظر الشكل :



حالة خاصة :

إذا كان للقطعتين [أ أَ] ، [ب بَ] نفس المحور، عندئذ نختار نقطة م من هذا المحور تحقق $\left(\overrightarrow{\text{م أ}} , \overrightarrow{\text{م أَ}}\right) \equiv \theta \; [2\pi]$.

- **تمرين :**

في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(\text{م} , \vec{\text{و}} , \vec{\text{ي}}\right)$ نعتبر الدوران ر $\left(\text{م} , \frac{\pi}{2}\right)$

والتناظر $\text{ت}_{\text{م س}}$.عرّف التحويل ل حيث ل = ر $\circ$ $\text{ت}_{\text{م س}}$ ثم التحويل لَ حيث : لَ = $\text{ت}_{\text{م س}}$ $\circ$ ر

- **الحل :**

نحلل الدوران ر إلى تركيب تناظرين عموديين حول مستقيمين وليكن أولهما م س فيكون ثانيهما هو المستقيم (Δ) : ع = س (المنصف الأول) وعندئذ يكون : ل = (ت_{Δ} $\circ$ $\text{ت}_{\text{م س}}$)$\circ$ $\text{ت}_{\text{م س}}$ = ت_{Δ} .

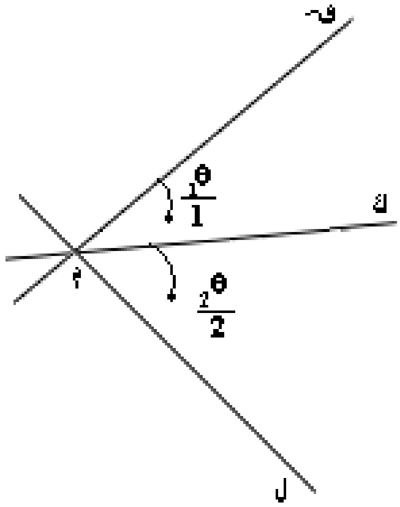
أي أن التحويل ل هو التناظر بالنسبة للمنصف الأول Δ : ع = س.

ومن أجل تعيين التحويل لَ نختار مستقيمين آخرين ثانيهما هو م س فيكون المستقيم الأول هو Δ' : ع = − س (المنصف الثاني) .

وعندئذ يكون : لَ = $\text{ت}_{\text{م س}}$ $\circ$ ($\text{ت}_{\text{م س}}$ $\circ$ $\text{ت}_{\Delta'}$) = $\text{ت}_{\Delta'}$.

أي أن التحويل لَ هو التناظر بالنسبة للمنصف الثاني (Δ') : ع = − س.

6 – تركيب دورانين :



• الدوراتان لهما نفس المركز : ر$_1$ (م ، θ_1)
، ر$_2$ (م ، θ_2) .

نحلل كلا منهما إلى تركيب تناظرين عموديين بحيث يوجد مستقيم مشترك.
(أنظر الشكل)

ر$_1$ = ت$_{ك}$ $\circ$ ت$_{ق}$.

ر$_2$ = ت$_{ل}$ $\circ$ ت$_{ك}$.

وعندئذ يكون :

ر$_2$ $\circ$ ر$_1$ = (ت$_{ل}$ $\circ$ ت$_{ك}$) $\circ$ (ت$_{ك}$ $\circ$ ت$_{ق}$)

= ت$_{ل}$ $\circ$ ت$_{ق}$.

فهو دوران مركزه النقطة م وزاويته $\theta_1 + \theta_2$.

ونكتب : ر$_2$ $\circ$ ر$_1$ = ر (م ، $\theta_1 + \theta_2$) .

• الدورانان لهما مركزان متمايزان :

ر$_1$ = (م$_1$ ، θ_1) ، ر$_2$ = (م$_2$ ، θ_2) .

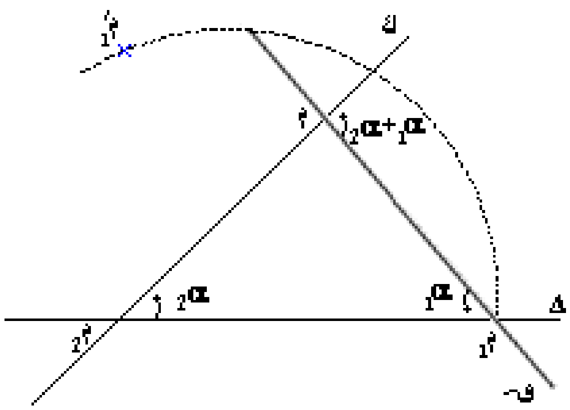
نفرض (Δ) خط المركزين ولنحلل الدورانين كما رأينا : ر$_1$ = ت$_{\Delta}$ $\circ$ ت$_{ق}$ ، ر$_2$ = ت$_{ك}$ $\circ$ ت$_{\Delta}$.

فيكون : ر$_2$ $\circ$ ر$_1$ = (ت$_{ك}$ $\circ$ ت$_{\Delta}$) $\circ$ (ت$_{\Delta}$ $\circ$ ت$_{ق}$) = ت$_{ك}$ $\circ$ ت$_{ق}$.

فإذا فرضنا : ق $\cap$ ك = { م } .

فإن ر$_2$ $\circ$ ر$_1$ هو دوران مركزه م وزاويته 2 (ق ، ك) = 2 $(\alpha_1+\alpha_2) = \theta_1+\theta_2$.

(لاحظ الاتجاه على الشكل) :



حالة خاصة :

إذا كان $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv$ ٥ $[2\pi]$

ر$_2$ ٥ ر$_1$ = ت$_{ك}$ ٥ ت$_{ق}$ حيث (ق) // (ك).

والتحويل هو إنسحاب شعاعه 2$\overleftarrow{م_1م_2}$. تجب $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)$

أي : 2 جب α_2 . $\overleftarrow{م_1م_2}$.

• ملاحظة :

يمكن تعميم التركيب أي : إذا كانت لدينا الدورانات : ر$_1$ = (م$_1$ ، θ_1) ، ر$_2$ = (م$_2$ ، θ_2)

، . . . . . . ر$_{ن}$ = (م$_{ن}$ ، $\theta_{ن}$).

فإن : ر$_1$ ٥ ر$_2$ ٥ . . . . ٥ ر$_{ن}$ = ر .

حيث ر (النقطة الصامدة ، $\sum_{\alpha=0}^{ن} \theta_\alpha$) .

أما إذا كان : $\sum_{\alpha=0}^{ن} \theta_\alpha = 0$ فالتحويل ر إنسحاب .

7 – تركيب دوران مع إنسحاب :

ليكن الانسحاب ن$_{\overleftarrow{ش}}$ والدوران ر (م ، θ).

نضع : ر = ت$_{ك}$ ٥ ت$_{\Delta}$ / $(\Delta) \cap$ (ك) = {م} ، $(\Delta$ ، ك$) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

ن$_{\overleftarrow{ش}}$ = ت$_{\Delta}$ ٥ ت$_{ق}$ ، (ق) // (Δ).

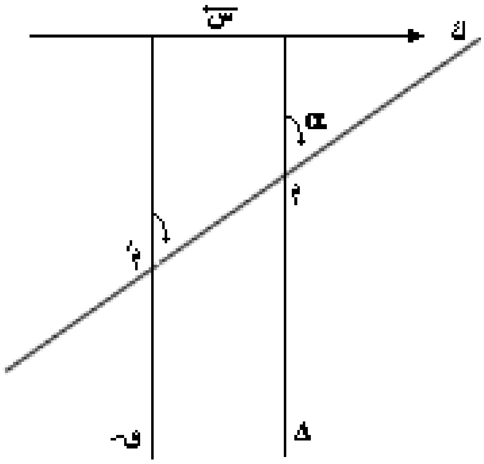
حيث (Δ) مستقيم مشترك مار من النقطة م .

ر ٥ ن = (ت$_{ك}$ ٥ ت$_{\Delta}$) ٥ (ت$_{\Delta}$ ٥ ت$_{ق}$) = ت$_{ك}$ ٥ ت$_{ق}$.

وهو دوران مركزه النقطة مَ نقطة تقاطع المستقيمين (ق) ، (ك). وزاويته 2(ق ، $\widehat{\ }$ ك)

= 2 (Δ ، $\widehat{\ }$ ك)= θ.

(أنظر الشكل)



لنعين الآن التحويل : ن $\circ$ ر

لأجل ذلك نغير إختيار المستقيمات، بأخذ (Δ) مستقيم مشترك مار من النقطة م

وهو الأول في الانسحاب أي : ن = $ت_{ق} \circ ت_{\Delta}$

ثم الدوران ر = $ت_{\Delta} \circ ت_{ك}$ / (ك ، Δ) = $\frac{\theta}{2}$

ن $\circ$ ر = ($ت_{ق} \circ ت_{\Delta}$) $\circ$ ($ت_{\Delta} \circ ت_{ك}$) = $ت_{ق} \circ ت_{ك}$.

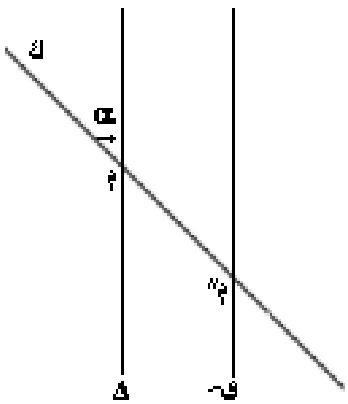
وهو دوران مركزه النقطة مً حيث (ق) $\cap$ (ك) = { مً }

وزاويته 2 (ك ، ق) = 2 (ك ، Δ) = θ . أنظر الشكل :

• **النتيجة :**

مركز انسحاب مع دوران (أو العكس) هو دوران مركزه نقطة جديدة وزاويته نفس زاوية الدوران.

وهذا التركيب ليس تبديليا لأن النقطتين مَ ، مً متمايزتان.



8- العبارة التحليلية للدوران :

ليكن المستوي (π) المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$.

ولنعتبر الدوران ر (م ، θ) عندئذ وبفرض (و⃗ ، م ن⃖) $\equiv \alpha\ [2\pi]$ يكون حسب علاقة شال : (و⃗ ، م نَ⃖) $\equiv \theta + \alpha\ [2\pi]$.

لدينا : م ن⃖ = س و⃗ + ع ي⃗ = م ن تجب α و⃗ + م ن جب α ي⃗

ومنه :
- س = م ن تجب α
- ع = م ن جب α

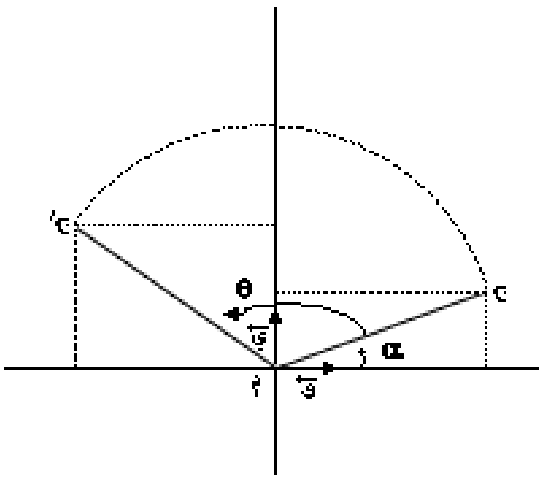
م نَ⃖ = سَ و⃗ + عَ ي⃗ = م نَ⃖ تجب $(\alpha+\theta)$ و⃗ + م نَ⃖ جب $(\alpha+\theta)$ ي⃗

ومنه :
- سَ = م نَ تجب $(\alpha+\theta)$
- عَ = م نَ جب $(\alpha+\theta)$

وباستخدام دساتير التحويل و ملاحظة م ن = م نَ نجد أن :
- سَ = س تجب θ − ع جب θ
- عَ = س جب θ + ع تجب θ

إذن :

ر(م ، θ) : ن(س ، ع) ⟵ نَ(سَ ، عَ) / { سَ = س تجب θ − ع جب θ ؛ عَ = س جب θ + ع تجب θ }



ويمكن وضع المعاملات في شكل رياضي جديد ندعوه مصفوفة الدوران .

$$\begin{bmatrix} \text{تجب}\ \theta & -\text{جب}\theta \\ \text{جب}\theta & \text{تجب}\theta \end{bmatrix}$$

• مثال : ر(م ، $\frac{\pi}{2}$) : ن (س ، ع) ⟼ نَ (سَ ، عَ) / $\left\{\begin{array}{l} \text{سَ} = -\text{ع} \\ \text{عَ} = \text{س} \end{array}\right.$

ر(م ، π) : ن (س ، ع) ⟼ نَ (سَ ، عَ) / $\left\{\begin{array}{l} \text{سَ} = -\text{س} \\ \text{عَ} = -\text{ع} \end{array}\right.$

وهو التناظر المركزي بالنسبة للنقطة م .

ملاحظة : العبارة التحليلية للتحويل العكسي ر(م ، $-\theta$) تنتج بتعويض θ بـ : $-\theta$

$\left\{\begin{array}{l} \text{سَ} = \text{س}\ \text{تجب}\ \theta + \text{ع جب}\ \theta \\ \text{عَ} = -\text{س جب}\ \theta + \text{ع}\ \ \text{تجب}\ \theta \end{array}\right.$ (راجع خواص الدوران).

• **الحالة العامّة** :

ليكن الدوران ر (ω ، θ) في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس حيث نعتبر ω (α_0 ، β_0) .

بملاحظة : $\overrightarrow{\text{م ن}} = \overrightarrow{\text{م}\omega} + \overrightarrow{\omega\text{ ن}}$

وَ $\overrightarrow{\text{م نَ}} = \overrightarrow{\text{م}\omega} + \overrightarrow{\omega\text{ نَ}}$.

وبفرض : $\left(\vec{\text{و}} ، \overrightarrow{\omega\text{ ن}}\right) \equiv \alpha\ [\ 2\pi\ ]$.

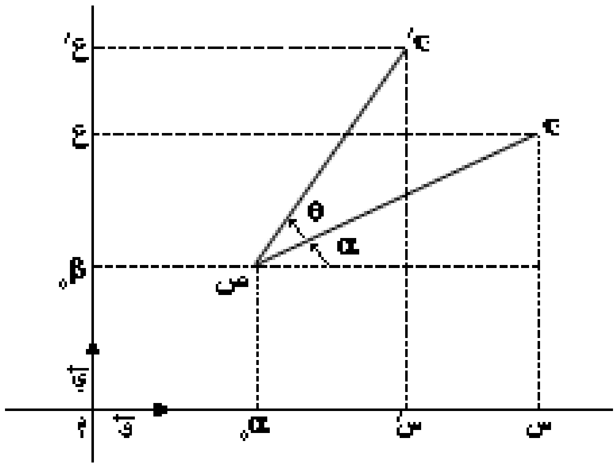
وحسب دساتير التغيير نجد :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{سَ} = \alpha_0 + \left(\text{س} - \alpha_0\right) \text{تجب}\ \theta - \left(\text{ع} - \beta_0\right) \text{جب}\ \theta \\ \text{عَ} = \beta_0 + \left(\text{ع} - \beta_0\right) \text{تجب}\ \theta + \left(\text{س} - \alpha_0\right) \text{جب}\ \theta \end{array}\right.$$

أي :

$$\boxed{\text{ر}(\omega،\theta) : \text{ن (س،ع)} \leftarrow \text{نَ(سَ،عَ)} \left\{\begin{array}{l} \text{سَ} = \alpha_0 + \left(\text{س} - \alpha_0\right) \text{تجب}\theta - \left(\text{ع} - \beta_0\right) \text{جب}\theta \\ \text{عَ} = \beta_0 + \left(\text{ع} - \beta_0\right) \text{تجب}\theta + \left(\text{س} - \alpha_0\right) \text{جب}\theta \end{array}\right.}$$

(أنظر الشكل)



• **مثال :**

في المستوي المنسوب لمعلم متعامد متجانس $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$ نعتبر النقطة $\omega(0 ، \sqrt{3})$

$$ر(\omega ، \frac{\pi}{6}) : ن(س ، ع) \longmapsto ن'(س' ، ع') \; / \; \begin{cases} س' = \frac{\sqrt{3}}{2}س - \frac{1}{2}ع + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ ع' = \frac{1}{2}س + \frac{\sqrt{3}}{2}ع + \sqrt{3} \end{cases}$$

9 – أسئلة التصحيح الذاتي :

1 – ليكن التحويل النقطي ل : ن (س ، ع) $\longmapsto$ نَ (سَ ، عَ) حيث :

$$\begin{cases} سَ = \frac{1}{2}س - \frac{\sqrt{3}}{2}ع + \sqrt{3} \\ عَ = \frac{\sqrt{3}}{2}س + \frac{1}{2}ع - 3 \end{cases}$$

أ – عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل ل .

ب – أثبت أن التحويل ل دوران، عين عناصره المميزة .

2 – نعتبر في المستوي (π) المربع أ ب جـ د حيث $\left(\overrightarrow{أب} ، \overrightarrow{أد}\right) = \frac{\pi}{2}$ وبفرض :

ر $\left(أ ، \frac{\pi}{2}\right)$ دوران .

ن$_{\overrightarrow{أجـ}}$ إنسحاب شعاعه $\overrightarrow{أجـ}$ ، ت$_{جـ}$ تناظر مركزي مركزه النقطة جـ .

أ – ما هي طبيعة التحويل ن$_{\overrightarrow{أجـ}}$ $\circ$ ر ، عين عناصره المميزة .

ب – ما هي طبيعة التحويل ت$_{جـ}$ $\circ$ ن$_{\overrightarrow{أجـ}}$ $\circ$ ر ، عين عناصره المميزة .

10 - أجوبـة الـتـصـحـيـح الـذاتـي :

1 - أ - بـفـرض ن (س ، ع) نـقـطـة صـامـدة :

لدينا سَ = س وَ عَ = ع أي : $\begin{cases} سَ = \frac{1}{2}س - \frac{\sqrt{3}}{2}س + \sqrt{3} \\ عَ = \frac{\sqrt{3}}{2}س + \frac{1}{2}ع - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} س + \sqrt{3}ع - 2\sqrt{3} = 0 \\ -\sqrt{3}س - ع + 6 = 0 \end{cases}$ (I)

لـلـجـمـلـة (I) حـل وحـيـد هـو $(2\sqrt{3} ، 0)$.

إذن لـلـتـحـويـل نـقـطـة صـامـدة وحـيـدة هـي $م_0 (2\sqrt{3} ، 0)$.

ب - يـكـفـي أن نـلاحـظ أن عـبـارة هـذا الـتـحـويـل يـمـكـن مـطـابـقـتـهـا مـع عـبـارة دوران لأن الـمـعـامـلات تـطـابـق مـصـفـوفـة الـدوران .

أي $\begin{cases} تجب\ \theta = \frac{1}{2} \\ جب\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

فـالـتـحـويـل هـو : $ر\left(م_0 ، \frac{\pi}{3}\right)$.

طـريـقـة أخـرى لـلـحـل : نـتـرك لـلـطـالـب الـبـرهـان بـالاعـتـمـاد على الـتـعـريـف أي يُـبـرهـن أن : $م_0ن = م_0نَ$. (حـسـب دسـتـور الـبـعـد بـيـن نـقـطـتـيـن) .

ويـحـسـب تـجـب $\left(\overleftarrow{م_0ن} ، \overleftarrow{م_0نَ}\right)$ اعـتـمـادا على تـعـريـف الـجـداء الـسـلـمـي .

$\overleftarrow{م_0ن} . \overleftarrow{م_0نَ} = \left\|\overleftarrow{م_0ن}\right\| . \left\|\overleftarrow{م_0نَ}\right\|$ تـجـب $\left(\overleftarrow{م_0ن} ، \overleftarrow{م_0نَ}\right)$

2 - أ - لـنـحـلّل الـدوران إلـى تـركـيـب تـنـاظـريـن عـمـوديـيـن ، كـذلـك الانـسـحـاب مـع مـلاحـظـة إخـتـيـار مـسـتـقـيـم مـشـتـرك بـيـنـهـمـا.

بـفـرض (Δ) // (ب د) و مـار مـن الـنـقـطـةأ.

ر = $ت_\Delta \circ ت_{أب}$

$ن_{\overleftarrow{أجـ}} = ت_{دب} \circ ت_\Delta$

ونركب : ن $\underset{أجـ}{o}$ ر = (ت$_{دب}$ o ت$_{\Delta}$) o (ت$_{\Delta}$ o تم$_{ب}$) = ت$_{دب}$ o تم$_{ب}$

وهو دوران مركزه ب و زاويته $2\left(\overleftarrow{أب}، \overleftarrow{دب}\right) = \frac{\pi}{2}$

ب – نعلم أن ت$_{جـ}$ هو دوران مركزه النقطة جـ وزاويته π .

لذا نضع : ت$_{جـ}$ = ر (جـ ، π)

لدينا : ل = ر(جـ،π)o ر(ب، $\frac{\pi}{2}$).

وحسب تركيب دورانين يكون مركبهما دوران وزاويته $\frac{3\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصّامدة.

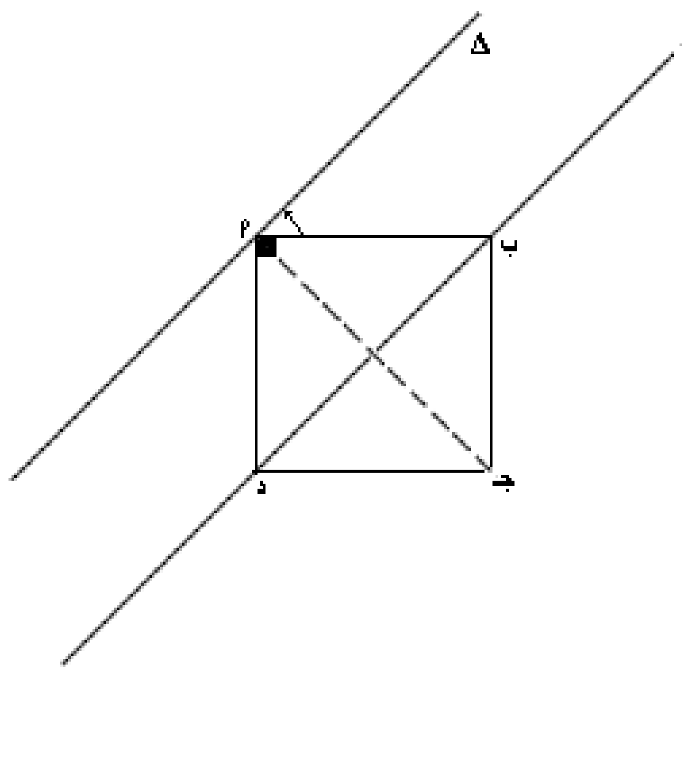
ولإيجاده نحلل كلا منهما إلى تركيب تناظريين عموديين أحدهما حول (ب جـ)

ل = (ت$_{جـد}$ o ت$_{بجـ}$) o (ت$_{بجـ}$ o ت$_{بد}$) = ت$_{جـد}$ o ت$_{بد}$

وهو دوران مركزه نقطة تلاقيهما أي النقطة د.

إذن : ل = ر (د ، $\frac{3\pi}{2}$).

طريقة أخرى للحل : نقترح على الطالب اختيار معلم نظامي مبدؤه النقطةأ أو نقطة أخرى وحل المسألة تحليليا.



التحاكي

ملاحظة : ليست جميع عناصر الدّرس مقرّرة لتلاميذ شعبة (ع .ط.ح).
العناصر المقرّرة هي : العنصر 1 وَ 2 وَ 3 والفقرة (4 – 1).
الهدف من الدرس :
– التعرّف على نوع جديد من التحويلات لا يحافظ على الأطوال.
المدة اللازمة لدارسته : 08 ساعات.
– **الدروس الواجب مراجعتها :** * الإرتباط الخطي لشعاعين.
* التقسيم التوافقي.
– **المراجع :**الكتاب المدرسي للسنة 3 ث / ع + ر المعهد التربوي الوطني.

تصميم الدرس

1 – تعريف التّحاكي.
2 – خواصه.
3 – نتائج.
4 – تركيب تحاكيين.
5 – تركيب تحاكي و إنسحاب.
6 – العبارة التحليلية للتحاكي.
7 – الدوائر المتحاكية.
8 – أسئلة التّصحيح الذّاتي.
9 – الأجوبة

1 – تـعـريـف

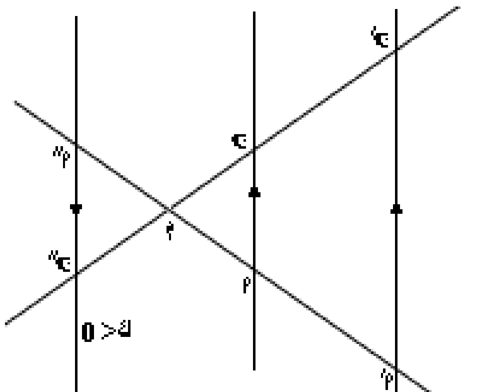
لـتكـن م نـقطــة ثـانـيـة فــي الـمسـتـوي. ك عـدد حـقيقــي غـيـر مـعـدوم. نـعـرّف الـتـحـويـل الـنقطـي :

حـ : π ← π

ن ↤ نَ : م نَ = ك . م ن.

نـسـمـي هـذا الـتحـويـل تـحـاكيـا ونـسمـي م مـركـز الـتحـاكـي وَ ك نـسبـة الـتحـاكـي ونـكـتـب : جـ (م، ك).

2 – خـواص الـتحـاكـي :



(الشكل 1)

2 – 1 – يـمكــن الاســتـفـادة مــن عـبارة الارتـبـاط الـخطي فنضع : $\frac{\text{م نَ}}{\text{م ن}}$=ك.

2 – 2 – • إذا كـان ك > 0

فـإن ن ، نَ تـقـعـان فـي جـهـة واحدة بـالـنـسبـة لِـ : م.

• إذا كـان ك < 0 فـإن : ن ، نَ تقعـان فـي جـهـتـين مـخـتـلـفـتـيـن بالـنـسبـة لِـ : م

• إذا كـان ك = − 1 .

• فـإن م نَ = −م ن. وهـذا الـتـحـويـل هـو الـتـنـاظـر حـول الـنـقطـة م. إذن حـ (م ، −1) = $ت_{م}$

• إذا كـان ك = 1.

فـإن : م نَ = −م ن ⇔ ن = نَ أي أن حـ (م، 1) = I_{π} .

2 – 3 – بـمـعـرفـة الـمركـز ومـعـرفـة نـقطـة ومـحـوّلـتـهـا يـمكـن رسـم مـحـولـة أي نـقطـة؟ بـرســم مـوازيــا لِـ ؟ ن مـن الـنـقـطـة نَ ثـم رسم مـستـقيـم مـار من م وَ ؟ فـيـتـقـاطـعـان في نـقطـة؟ هـي مـحـولـة ؟ وفق الـتـحـاكـي. وذلك اعـتـمـادًا عـلـى نـظـريـة طـالـيـس.

ويـمكـن إيـجاد؟ سـابقـة ؟ بـنفس الطـريـقـة. (أنـظـر الـشـكـل 1)

2 – 4 – التحاكي حـ (م ، ك) تقابل لأن : $\overrightarrow{م\,ن'} =$ ك . $\overrightarrow{م\,ن} \Leftrightarrow \overrightarrow{م\,ن} = \frac{1}{ك} . \overrightarrow{م\,ن'}$ أي للمعادلة حل وحيد، وبالتالي له تحويل عكسي حـ $^{-1}$ هو تحاكي مركزه م ونسبته.

إذن : حـ $^{-1}$ (م ، $\frac{1}{ك}$).

2 – 5 – إذا كان ك $\neq 1$ فإن النقطة الصامدة الوحيدة هي م.

لأنه بفرض د نقطة صامدة أخرى عندئذ :

$\overrightarrow{م\,د} =$ ك $\overrightarrow{م\,د} \Leftrightarrow (1-$ ك $) \overrightarrow{م\,د} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{م\,د} = \vec{0} \Leftrightarrow$ د = م

2 – 6 – التحاكي ليس تضامنيا دائما ولنركبه مع نفسه فنجد بفرض حـ (م ، ك).

ن $\xrightarrow{حـ}$ نَ $\xrightarrow{حـ}$ نً

$\left(\overrightarrow{م\,نَ} =\right.$ ك $\overrightarrow{م\,ن}$ و $\overrightarrow{م\,نً} =$ ك.$\left.\overrightarrow{م\,نَ}\right) \Rightarrow \overrightarrow{م\,نً} =$ ك$^2 \overrightarrow{م\,ن}$

$\because$ جـ $= I_\pi \Leftrightarrow$ ك$^2 = 1 \Leftrightarrow$ ك $= 1$ أو ك $= -1$

إذن حـ (م ، 1) = I_π وَ حـ (م، -1) = ت$_م$ هما تضامنيان.

2 – 7 كل مستقيم (Δ) مار من م يكون صامدًا إجمالاً وبالعكس كل مستقيم صامد إجمالا يمر من م، وذلك لأنه : $\forall$ ن $\in$ (Δ) فإن : م ، ن ، نَ على استقامة واحدة. أي أن نَ تنتمي إلى (Δ)

2 – 8 **الخاصة المميّزة :**

ليكن التحاكي حـ (م ، ك) وبفرض أَ = حـ(أ)، بَ = حـ(ب)

أي : $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{م\,أَ} = \text{ك} .\overrightarrow{م\,أ} \\ \overrightarrow{م\,بَ} = \text{ك} . \overrightarrow{م\,ب}\end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{م\,بَ} - \overrightarrow{م\,أَ} =$ ك $\left(\overrightarrow{م\,ب} - \overrightarrow{م\,أ}\right)$

أي $\overrightarrow{أَ\,بَ} =$ ك . $\overrightarrow{أ\,ب}$

لنبرهن العكس : بفرض ل تحويل ما يحقق : $\forall$ $\overrightarrow{ش}$ ، $\overrightarrow{شَ} =$ ك . $\overrightarrow{ش}$

حيث $\overrightarrow{شَ} =$ ل $(\overrightarrow{ش})$ وَ ك ك $\in$ ح*

ولنأخذ أ نقطة ما محولتها أَ= ل (أ)، ونميّز حالتين :

1 / أَ = أ عندئذ : $\forall$ن$\in$ (π) وبفرض نَ = ل (ن) فإن : $\overrightarrow{أ\,نَ} =$ ك . $\overrightarrow{أ\,ن}$ (حسب الفرض) وهذا هو تعريف التحاكي الذي مركزه أ ونسبة ك.

أي أن : ل = حـ = (ا ، ك).

ا ≠ ا. نميّز حالتين :

ك = 1 : فإن : اَ نَ = ا ن وهي الخاصة المميزة للآنسحاب.

إذن : ل هو إنسحاب شعاعه ا ا

- ك = 1 . عندئذ توجد نقطة م تنتمي إلى [ا ا] .

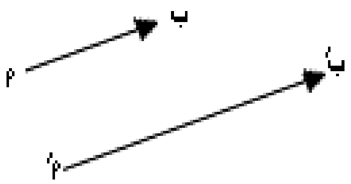
بحيث : م ا / م ا = ك .

أي م ا = ك . م ا وهذا يعني أنا هي محولة ا.

ومنه حـ (م ، ك).

وبفرض نً = ل (ن) عندئذ
ا نً = ك . ا ن
ا نَ = ك . ا ن
⇐ ا نَ = ا نً ⇐ نً = نَ

أي : ل = حـ (م، ك).



إذن الشرط اللازم والكافي ليكون التحويل النقطي تحاكيًا هو أن يوجد عدد حقيقي ك≠ 1 وَ ك ≠ 0 (وبفرض ا، بَ محولتا ا، ب وفق هذا التحويل) ويحقق :ا بَ = ك. ا ب.

لاحظ الشكل (2)

3 - نتائج :

1 - ينتج من الخاصة المميّزة للتحاكي أن محوّلة أي مستقيم (ق) هو مستقيم (قَ) بحيث :

(ق) // (قَ) وذلك لتوازي شعاعي توجيههما.

(لاحظ في الشكل1) أن محوّلة ا ن هي ا نَ.

2 - إذا كان (ق).(ل) مستقيمان حيث : (ق،ل) =α وبفرض حـ تحاكي ما فإن : (قَ) // (ق) و (لَ) // (ل) وبالتالي (ق ، لَ) =α

أي أن التحاكي يحافظ على الزوايا.

فالزاوية بين مستقيمين تقايس الزاوية بين محوّليهما وفق التحاكي.

3 – بأخذ طويلتي الشعاعين في الخاصة المميّزة نجد :$\overleftarrow{أَ بَ}$ = ك. $\overleftarrow{أ ب}$ أي

$$\frac{أ ب}{\overleftarrow{أَ بَ}} = \frac{1}{ك}$$

ونلاحظ أنه إذا كان :

ك > 0 فالقطع متوافقة في الاتجاه.

ك < 0 فالقطع مختلفة في الاتجاه.

(لا حظ الشكل1)

4 – إذا أخذنا مثلثا ومحوّلة فإن نسبة مساحة المثلث المحول إلى مساحة المثلث المفروض هي $ك^2$.

ويمكن تعميم ذلك إلى مساحة أي شكل آخر.

4 – تركيب تحاكيين :

1 – التحاكيين لهما نفس المركز :

بفرض $حـ_1$ (م ، ك) .$حـ_2$ (م ، كَ) حيث (ك ، كَ)∋ $ح^{*2}$.

$ن \xrightarrow{حـ_1} ن_1 \xrightarrow{حـ_2} نَ$

وحسب التعريف : $\overleftarrow{م ن_1}$ = ك . $\overleftarrow{م ن}$ و $\overleftarrow{م نَ}$ = $\overleftarrow{كَ}$. $\overleftarrow{م ن_1}$.

وبالتعويض : $\overleftarrow{م نَ}$ = كَ (ك $\overleftarrow{م ن}$) = كَ . ك $\overleftarrow{م ن}$.

وهذا تعريف التحاكي الذي مركزه م و نسبته كَ.ك (بفرض كَ . ك ≠ 1)

أي : $حـ_2$ (م ، كَ) o $حـ_1$ (م ، ك) = حـ (م ، كَ.ك)

أما إذا كان كَ . ك = 1 فإن المركب هو التحويل المطابق .

نلاحظ هذا التركيب تبديلي لأن الضرب كَ . ك تبديلي .

2 – التحاكيان مراكزهما مختلفان :

• نفرض الآن : ك . كَ = 1 أي كَ = $\frac{1}{ك}$.

وليكن التحاكيان $حـ_1$ (م ، ك) ، $حـ_2$ (مَ ، كَ) .

وبفرض : $ن \xrightarrow{حـ_1} ن_1 \xrightarrow{حـ_2} نَ$

$\overrightarrow{م ن_1} = ك . \overrightarrow{م ن}$ و $\overrightarrow{مَ نَ} = كَ . \overrightarrow{مَ ن_1}$

ولنحسب : $\overrightarrow{م نَ} = \overrightarrow{م مَ} + \overrightarrow{مَ نَ}$.

$\overrightarrow{م نَ} = \overrightarrow{م مَ} + كَ . \left(\overrightarrow{مَ م} + \overrightarrow{م ن_1} \right) = (1 - كَ) \overrightarrow{م مَ} + كَ . ك \overrightarrow{م ن}$

$\overrightarrow{م نَ} = (1 - كَ) \overrightarrow{م مَ} + \overrightarrow{م ن}$.

$\overrightarrow{م نَ} = \overrightarrow{م ن} = (1 - كَ) \overrightarrow{م مَ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ن نَ} = (1 - كَ) \overrightarrow{م مَ}$

وهذا تعريف الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{ش} = \left(1 - \frac{1}{ك}\right) \overrightarrow{م مَ}$.

إذن : $حـ_2 (مَ ، \frac{1}{ك}) \circ حـ_1 (م ، ك) = ن_{\left(1 - \frac{1}{ك}\right) \overrightarrow{م مَ}}$.

ملاحظة : إذا أعدنا العمل من أجل التحويل $حـ_1 \circ حـ_2$

سنجد أنه انسحاب شعاعه $\overrightarrow{شَ} = (1 - ك) \overrightarrow{مَ م}$ وهو يختلف عن الشعاع $\overrightarrow{ش}$ وهذا يعني أن العملية ($\circ$) ليست تبديلية .

- نفرض الآن أن جداء النسبتين يختلف عن 1 :

أي ليكن $حـ_1 (م_1 ، ك_1)$ $حـ_2 (م_2 ، ك_2)$ حيث $ك_1 . ك_2 \neq 1$.

وبفرض : $ا \xrightarrow{حـ_1} ا_1 \xrightarrow{حـ_2} اَ$

$ب \xrightarrow{حـ_1} ب_1 \xrightarrow{حـ_2} بَ$

وحسب الخاصة المميزّة فإن :

$\overrightarrow{ا_1 ب_1} = ك_1 . \overrightarrow{ا ب}$ و $\overrightarrow{اَ بَ} = ك_2 . \overrightarrow{ا_1 ب_1}$

وبالتعويض ينتج :

$\overrightarrow{اَ بَ} = \left(ك_2 . ك_1 \right) . \overrightarrow{ا ب}$.

وهي الخاصة المميزة للتحاكي. فالمركب هو تحاكي نسبته جداء النسبتين ولإيجاد مركز التحاكي نبحث عن النقطة الصامدة وفق هذا المُركب .

نفرض م نقطة صامدة وفق $جـ_2 \circ جـ_1$ أي :

$م \xrightarrow{حـ_1} مَ \xrightarrow{حـ_2} م$

وحسب التعريف :

$\overrightarrow{م_1م'} = ك_1\,\overrightarrow{م_1م}$ و $\overrightarrow{م_2م''} = ك_2\,\overrightarrow{م_2م'}$

ولتحديد موضع النقطة م نحسب الشعاع $\overrightarrow{م_1م}$ وحسب شال فإن :

$$\overrightarrow{م_1م''} = \overrightarrow{م_1م_2} + \overrightarrow{م_2م''} = \overrightarrow{م_1م_2} + ك_2\left(\overrightarrow{م_2م_1} + \overrightarrow{م_1م'}\right)$$

$$= \overrightarrow{م_1م_2} + ك_2\left(-\overrightarrow{م_1م_2} + ك_1\,\overrightarrow{م_1م}\right)$$

$$= \left(1 - ك_2\right)\overrightarrow{م_1م_2} + ك_2 \cdot ك_1\,\overrightarrow{م_1م}$$

$$= \left(1 - ك_1ك_2\right)\overrightarrow{م_1م} = \left(1 - ك_2\right)\overrightarrow{م_1م_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{م_1م} = \frac{1 - ك_2}{1 - ك_1ك_2}\,\overrightarrow{م_1م_2} \quad (*)$$

وهذه العلاقة تُحدد النقطة م وتبين أن : $\overrightarrow{م_1م}$ و $\overrightarrow{م_1م_2}$ مرتبطين خطيا أي أن النقطة م تقع على خط المركزين $م_1م_2$.

إذن مركب التحاكيين هو تحاكي نسبته جداء النسبتين ومركزه النقطة م المعرّفة بالعلاقة (*) .

(إذا كان جداء النسبتين لا يساوي 1).

5 – تركيب تحاكي مع انسحاب :

ليكن التحاكي حـ (م ، ك) والانسحاب $ن_{\vec{ش}}$.

ولتكن النقطتان ا ، ب حيث

$$ا \xrightarrow{حـ} ا_1 \xrightarrow{ن} ا'$$

$$ب \xrightarrow{حـ} ب_1 \xrightarrow{ن} ب'$$

وحسب الخاصة المميزة : $\overrightarrow{ا_1ب_1} = ك.\overrightarrow{اب}$ و $\overrightarrow{ا'ب'} = \overrightarrow{ا_1ب_1}$.

أي $\overrightarrow{ا'ب'} = ك\,\overrightarrow{اب}$ وهي الخاصة المميزة للتحاكي .

أي أن مركب تحاكي مع انسحاب هو تحاكي جديد له نفس النسبة ومركزه النقطة الصامدة وفق التحويل الجديد .

• **نـتيـجـة 1 :**

كل تـحـاكـي يـمـكـن تـحـليـلـه إلـى تـركـيـب تـحـاكـي لـه نـفـس الـنـسـبـة مـع إنـسـحـاب .

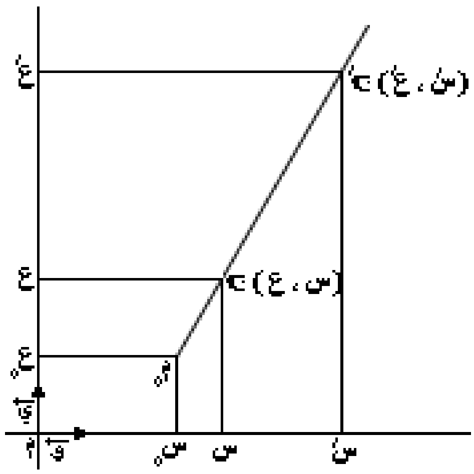
• **نـتيـجـة 2 :**

بـفـرض ج مـجـمـوعـة الـتـحـاكـيـات فـي الـمـسـتـوي ، سـح مـجـمـوعـة الانـسـحـابـات فـي الـمـسـتـوي. عـنـدئـذ الـعـمـلـيـة (o) تـزود الـمـجـمـوعـة ج $\cup$ سـح بـبـنـيـة زمـرة .

• **مـلاحـظـة :**

تـركـيـب تـحـاكي مع دوران سيكون موضوع بحث قـادم وهـو الـتـشـابـه.

6 – العبـارة التـحـليـلـيـة للتـحـاكـي :



بـفـرض (π) مـسـتـوي منسـوب لـمـعـلـم متعـامد ومتـجـانس $\left(\text{م} ، \overleftarrow{\text{و}} ، \overleftarrow{\text{ي}}\right)$.

ولـيكـن حـ (م0 ، ك) حيث م0 (س0 ، ع0) .

ولـتـكـن ن $\xrightarrow{\text{حـ}}$ ن'

أي أن $\overleftarrow{\text{م}_0\text{ن}'} = \text{ك} . \overleftarrow{\text{م}_0\text{ن}}$

ومـنـه $\overleftarrow{\text{م ن}'} - \overleftarrow{\text{م م}_0} = \text{ك}\left(\overleftarrow{\text{م ن}} - \overleftarrow{\text{م م}_0}\right)$

أي $\overleftarrow{\text{م ن}'} = \text{ك} \overleftarrow{\text{م ن}} + (1 - \text{ك}) \overleftarrow{\text{م م}_0}$

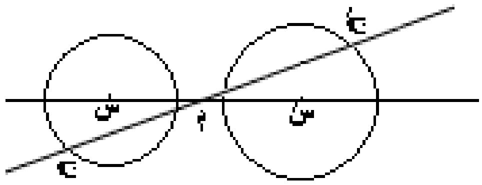
بـالإسـقـاط يـنـتـج $(*)$ $\begin{cases} \text{س}' = \text{ك س} + (1 - \text{ك}) \text{ س}_0 \\ \text{ع}' = \text{ك ع} + (1 - \text{ك}) \text{ ع}_0 \end{cases}$

حـالـة خـاصـة : إذا كانـت م0 هـي المبـدأ فـالعبـارة تصبح : $\begin{cases} \text{س}' = \text{ك س} \\ \text{ع}' = \text{ك ع} \end{cases}$

لاحـظ أن الـعــبـارة (*) تـمــثـل مـركــب تـحـاكــي مـركــزه الـنـقـطـة م مـع انـســحـاب شـعـاعـه :

$\overleftarrow{\text{ش}}\begin{pmatrix} (1 - \text{ك}) \text{ س}_0 \\ (1 - \text{ك}) \text{ ع}_0 \end{pmatrix}$ مما يؤكد (الفقـرة 4) .

7 - الدوائر المتحاكية :



ليكن التحاكي حـ (م ، ك) ولتكن الدائرة د (ω ، ر) ولنبرهن أن محوّلتها وفق حـ هي دائرة.

لنفرض أن : $\omega \xrightarrow{\text{حـ}} \omega'$ أي :

و بفرض ن نقطة اختيارية من (د) عندئذ :

$\overrightarrow{\text{م}_0\text{ن}'} = \text{ك} \cdot \overrightarrow{\text{م ن}}$. (ن' = جـ (ن))

وبطرح (1) من (2) ينتج :

$\overrightarrow{\text{م ن}'} - \overrightarrow{\text{م}\,\omega'} = \text{ك}\left(\overrightarrow{\text{م ن}} - \overrightarrow{\text{م}\,\omega}\right)$.

أي $\overrightarrow{\omega'\,\text{ن}'} = \text{ك} \cdot \overrightarrow{\omega\,\text{ن}}$.

ومنه :

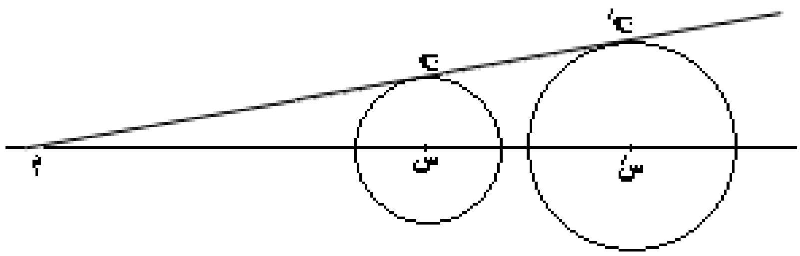
$\left\|\overrightarrow{\omega'\,\text{ن}'}\right\| = |\text{ك}| \cdot \left\|\overrightarrow{\omega\,\text{ن}}\right\| = |\text{ك}| \cdot \text{ر}$.

أي أن : $\left\|\overrightarrow{\omega'\,\text{ن}'}\right\| = \|\text{ك}\| \cdot \text{ر}$.

فالنقطة ن' تبعد عن ω' بعدا ثابتا هو |ك| . ر أي أن :

ن' ترسم دائرة مركزها ω' ونصف قطرها ر' = |ك| . ر

إذن حـ (د) = د' (ω' ، ر') . أنظر الشكلين :



- **ملاحظة :**

إذا كان ك > 0 فإن ω' ، ω تكونان في جهة واحدة بالنسبة لِـ : م.

إذا كان ك < 0 فإن ω' ، ω تكونان في جهتين مختلفتين بالنسبة لِـ م .

العكس : من أجل أي دائرتين يوجد تحاكي يُحوّل إحداهما إلى الأخرى

بفرض د (ω ، ر) ، د' (ω' ، ر') دائرتين حيث $\frac{\text{ر}'}{\text{ر}} = \text{ك}$.

عندئذ حسب التقسيم : يوجد نقطة م تقسم خارجيا القطعة [ω ω'] بنسبة 1 إلى ك

أي $\frac{م\omega'}{م\omega}=$ ك فإذا أخذنا التحاكي حـ (م ، ك) فإن :

$\overrightarrow{م\omega'}$ = ك .$\overrightarrow{م\omega}$ ومحوّلة (د) هي الدائرة (دَ) حسب ما تقدّم. لاحظ أن للمعادلة حل آخر وهي النقطة مَ القاسمة داخليا بنسبة 1 إلى –ك والتحاكي هو حـ (مَ ، –ك) .

8 – أسئلة التصحيح الذاتي :

8 – 1 – ليكن التحويلان ت ، تَ المعرّفين بالعبارتين التحليليتين الآتيتين :

$$ت : \begin{cases} سَ = 2س + 1 \\ عَ = 2ع - 3 \end{cases} \qquad تَ : \begin{cases} سَ = 3س - 2 \\ عَ = 3ع + 4 \end{cases}$$

1 – ما هي طبيعة التحويلين محدداً العناصر المميزة لكل منهما.

2 – عين التحويل ت o تَ محددا عناصره المميزة.

8 – 2 – بفرض α ، β ، γ ثلاث نقاط في المستوي ليست على استقامة واحدة. وليكن ط عدد حقيقي مفروض (ط≠ 0).

وليكن التحاكي حـ (α ، ط) والتناظر المركزي $ت_{\beta}$ والانسحاب $ن_{\overrightarrow{\beta\gamma}}$.

نعرّف التحويل : ل = $ن_{\overrightarrow{\beta\gamma}}$ o $ت_{\beta}$ o جـ (α ، ط) .

أدرس وناقش حسب قيم الوسيط ط طبيعة التحويل ل محددا العناصر المميزة له . (بكالوريا 1982)

9 - أجوبة التصحيح الذاتي :

9 - 1 -

1- لنبحث أولا عن النقاط الصامدة للتحويل ت فنجد :

$$\text{ن}_1(\text{س}\,،\,\text{ع})\ \text{صامدة} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = 2\text{س} + 1 \\ \text{ع} = 2\text{ع} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = -1 \\ \text{و} \\ \text{ع} = 3 \end{cases}$$

فالنقطة الصّامدة هي ن_1 (−1 ، 3) وبمقارنة عبارة التحويل ت مع عبارة التحاكي نجد أن ت هو تحاكي نسبته 2 ومركزه ن_1. أي : ت = حـ (ن_1 ، 2) .

نعيد العمل من أجل تحويل تَ فنجد : تَ = حَ (ن_2، 3) حيث ن_2 (1 ، −2).

2 - لإيجاد عبارة ت o تَ نضع :

$$\text{ن}(\text{س}\,،\,\text{ع}) \xrightarrow{\text{تَ}} \text{ن}_1(\text{س}_1\,،\,\text{ع}_1) \xrightarrow{\text{ت}} \text{نَ}(\text{سَ}\,،\,\text{عَ})$$

$$\begin{cases} \text{س}_1 = 3\text{س} - 2 \\ \text{ع}_1 = 3\text{ع} + 4 \end{cases} \text{و} \begin{cases} \text{سَ} = 2\text{س}_1 + 1 \\ \text{عَ} = 2\text{ع}_1 - 3 \end{cases} \text{بالتعويض نجد :} \begin{cases} \text{سَ} = 6\text{س} - 3 \\ \text{عَ} = 6\text{ع} + 5 \end{cases}$$

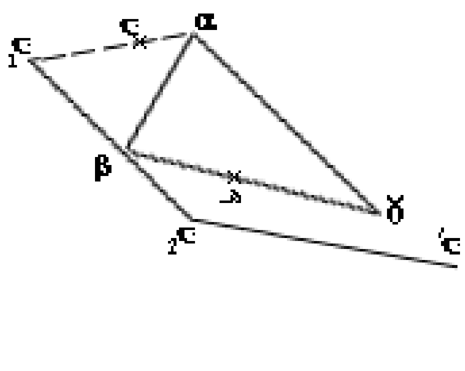
ونلاحظ أنه تحاكي نسبته 6 ومركزه النقطة الصامدة : $\text{ن}_0\left(\frac{3}{5}\,،\,-1\right)$.

9 - 2 - لنركب التحويلات الثلاثة :

$$\forall\ \text{ن} \in (\pi) :\ \text{ن} \xrightarrow{\text{حـ}} \text{ن}_1 \xrightarrow{\text{ت}_{\beta}} \text{ن}_2 \xrightarrow{\text{ن}_{\overleftarrow{\beta\gamma}}} \text{نَ}$$

$$\overrightarrow{\alpha\,\text{ن}_1} = \text{ط} \cdot \overrightarrow{\alpha\,\text{ن}} \qquad \overrightarrow{\beta\,\text{ن}_2} = -\overrightarrow{\beta\,\text{ن}_1} \qquad \overrightarrow{\text{ن}_2\,\text{نَ}} = \overrightarrow{\beta\gamma}\ .$$

لنحاول ربط ن بـ نَ وفق علاقة شعاعية باستخدام بقية النقاط .



لدينا : $\overrightarrow{\alpha\,\text{نَ}} = \overrightarrow{\alpha\,\text{ن}_1} + \overrightarrow{\text{ن}_1\,\text{ن}_2} + \overrightarrow{\text{ن}_2\,\text{نَ}}$

$$= \text{ط}\,\overrightarrow{\alpha\,\text{ن}} + 2\overrightarrow{\text{ن}_1\beta} + \overrightarrow{\beta\gamma}$$

$$= \text{ط}\,\overrightarrow{\alpha\,\text{ن}} + 2\overrightarrow{\text{ن}_1\alpha} + 2\overrightarrow{\alpha\beta} + \overrightarrow{\beta\gamma}$$

$$= -\text{ط}\,\overrightarrow{\alpha\,\text{ن}} + \overrightarrow{\alpha\beta} + \overrightarrow{\alpha\gamma}$$

$$= -\text{ط}\,\overrightarrow{\alpha\,\text{ن}} + 2\overrightarrow{\alpha\,\text{هـ}}$$

حيث هـ منتصف القطعة [β γ] .

إذن : ∀ ن ∋ (π) : $\overrightarrow{\alpha\,\text{ن}'} = -\text{ط} \,.\, \overrightarrow{\alpha\,\text{ن}} + 2 \,.\, \overrightarrow{\alpha\,\text{هـ}}$

• فإذا كان : ط = −1 عندئذ : $\overrightarrow{\alpha\,\text{ن}'} = \overrightarrow{\alpha\,\text{ن}} + 2 \,.\, \overrightarrow{\alpha\,\text{هـ}}$

أي $\overrightarrow{\text{ن}\,\text{ن}'} = 2 \,.\, \overrightarrow{\alpha\,\text{هـ}}$

والتحويل ل هو إنسحاب شعاعه $2\,\overrightarrow{\alpha\,\text{هـ}}$.

• أما إذا كان : ط ≠ −1 فالتحويل ل هو مركب التحاكي جـ (α ، −ط) مع إنسحاب شعاعه $2 \,.\, \overrightarrow{\alpha\,\text{هـ}}$.

وحسب (الفقرة 5) التحويل هو تحاكي له نفس النسبة ومركزه نقطة جديدة هي النقطة الصامدة.

وبفرض م نقطة صامدة وفق ل أي :

$\text{م} = \text{م}' \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha\,\text{م}} = -\text{ط} \,.\, \overrightarrow{\alpha\,\text{م}} + 2 \,.\, \overrightarrow{\alpha\,\text{هـ}} \Leftrightarrow (1+\text{ط})\,.\,\overrightarrow{\alpha\,\text{م}} = 2\,\overrightarrow{\alpha\,\text{هـ}}$

و منه $\overrightarrow{\alpha\,\text{م}} = \dfrac{2}{1+\text{ط}}\,\overrightarrow{\alpha\,\text{هـ}}$.

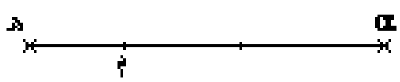
أي أن النقطة م تقع على امتداد القطعة [α هـ] .

بحيث م تقسم α هـ بنسبة $\dfrac{2}{1+\text{ط}}$.

فمثلا من أجل ط = 2 نجد : $\overrightarrow{\alpha\,\text{م}} = \dfrac{2}{3} \,.\, \overrightarrow{\alpha\,\text{هـ}}$

ونعلم أن هذه النقطة م هي مركز ثقل المثلث α β γ .

أنظر الشكل :



تساوي القياس

ملاحظة : هذا الدرس غير مقرّر لتلاميذ شعبة علوم الطبيعة والحياة.

الهدف من الدرس : تصنيف التحويلات السابقة إلى نوعين أحدهما يحافظ على الأطوال والزوايا الموجّهة والآخر لا يحافظ على أحدهما أو على كليهما .

المدة اللازمة لدارسته : 05 ساعات.

الدروس الواجب مراجعتها : الإنسحاب و الدوران .

المراجع : الكتاب المدرسي للسنة 3 ث / ع + ر المعهد التربوي الوطني.

تصميم الدرس

- تمهيد.

1 - تعريف.

2 - تركيب تساويي قياس.

3 - نظرية.

4 - نتائج.

5 - تساوي القياس العكسي.

6 - الإزاحة و ضد الإزاحة.

7 - تركيب إزاحتين.

8 - نتيجة.

9 - أسئلة التّصحيح الذّاتي.

10 - الأجوبة.

تمهيد :

سنتعرّف في هذا البحث على خاصة أساسية للتحويلات النقطية وهي محافظتها على الأطوال والاتجاهات أو عدم محافظتها مما يجعلنا نميّز بين التناظر العمودي والانسحاب والدوران من جهة وبين التحاكي من جهة أخرى. وسنقبل عددا من نظريات هذا البحث بدون برهان لقلة أهميتها في برنامج الرياضيات للسنة النهائية.

1 – تعريف :

نقول عن تحويل نقطي ل أنه تساوي قياس إذا وفقط إذا كان : $\forall$(ن ، ن$_1$) $\in$ $(\pi)^2$:

$\left\|\overrightarrow{\text{ن ن}_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{\text{نَ نَ}_1}\right\|$ أي ن ن$_1$ = نَ نَ$_1$

حيث نَ = ل (ن) ، نَ$_1$ = ل (ن$_1$) أي أنه يحافظ على المسافات .

*** أمثلة :**

1 – التحويل الحيادي تساوي قياس .

2 – كل تناظر عمودي بالنسبة لمستقيم هو تساوي قياس .

3 – التناظر المركزي بالنسبة لنقطة هو تساوي قياس .

4 – التحاكي جـ (م،ك) ليس تساوي قياس من أجل ك$\neq 1$ و ك $\neq -1$

2- تركيب تساويين قياس :

ليكن تساويا القياس ت ، تَ حيث :

$$\text{ن} \xrightarrow{\text{تَ}} \text{ن}_1 \xrightarrow{\text{ت}} \text{نَ}$$

$$\text{د} \xrightarrow{\text{تَ}} \text{د}_1 \xrightarrow{\text{ت}} \text{دَ}$$

عندئذ :• (ت o تَ) (ن) = ت (تَ (ن)) = ت (ن$_1$) = نَ .

• (ت o تَ) (د) = ت (تَ (د)) = ت (د$_1$) = دَ .

وحسب التعريف :

$$\left.\begin{array}{l} د\, ن_1 = د_1\, ن \\ د\, نَ = د_1\, نَ_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow د\, نَ = د\, ن$$

وهو تساويي قياس .

إذن مركب تساويي قياس هو تساوي قياس .

3 – نظرية :

كل تساوي قياس ت يكتب كترتيب انسحاب ن مع تساوي قياس آخر بحيث يكون للتحويل ل نقطة صامدة على الأقل . أي ت = ن o ل .

البرهان :

لتكن أ نقطة اختيارية من المستوي بحيث : أَ= ت (أ). وليكن الانسحاب $ن_1$ شعاعه $\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{أَ أ}$.

ولنأخذ التحويل ل = $ن_1$ o ت. عندئذ :

ل (أ) = $ن_1$ (ت(أ)) = $ن_1$ (أَ) = أي أن أ نقطة صامدة وفق ل .

ثم إن ل تساوي قياس لأنه تركيب تساويي قياس هما $ن_1$ وَ ت. ولكن ل = $ن_1$ o ت $\Leftrightarrow$

ت = $ن_1^{-1}$ o ل . و بوضع $ن_1^{-1}$ = ن

$\Leftrightarrow$ ت = ن o ل .

4 – نتائج :

4 – 1 – نتيجة 1 :

إن تساوي القياس الذي له نقطة صامدة على الأقل هو إما تناظر عمودي أو دوران (مركب تناظرين عموديين) .

وإعتماداً على النظرية (3) السابقة فإن كل تساوي قياس يُكتب : ت = ن o $ت_\Delta$ أو ت = $ت_\Delta$ o $ت_{\Delta'}$.

حيث $ت_\Delta$، $ت_{\Delta'}$ تناظران عموديان حول المستقيمين (Δ) ، (Δ') على الترتيب.

أي أن تساوي القياس هو تركيب إنسحاب مع تناظر أو إنسحاب مع دوران.

4 – 2 - نتيجة 2 :

كل تساوي قياس في المستوي هو التحويل الحيادي أو تناظر بالنسبة لمستقيم أو مركب تناظرين بالنسبة لمستقيمين أو مركب ثلاث تناظرات عمودية.

من النتيجة السابقة وفي حالة : $ت = ن \circ ت_{\Delta}$.

فإذا كان شعاع الانسحاب يُعامد(Δ) فإن : $ن = ت_{\Delta_1} \circ ت_{\Delta}$ وبالتركيب نجد :

$$ت = \left(ت_{\Delta_1} \circ ت_{\Delta} \right) \circ ت_{\Delta} = ت_{\Delta_1} .$$

وإذا كان شعاع الانسحاب لا يعامد (Δ) فإن ت هو مركب ثلاث تناظرات عمودية.

يمكن إعادة التحليل في حالة : $ت = ن \circ ت_{\Delta} \circ ت_{\Delta'}$.

فنجد أنه مركب تناظرين عموديين أو ثلاث تناظرات عمودية .

5 – تساوي القياس العكسي :

من النتيجة (4 –1) نجد أن ت مركب انسحاب مع تناظرات عمودية وكل منها تقابل.

إذن ت تقابل فله تحويل عكسي هو :

- $ت = ن \circ ت_{\Delta} \Leftrightarrow ت^{-1} = ت_{\Delta}^{-1} \circ ن^{-1} = ت_{\Delta} \circ ن^{-1}$

أو

- $ت = ن \circ ت_{\Delta} \circ ت_{\Delta'} \Leftrightarrow ت^{-1} = ت_{\Delta'}^{-1} \circ ت_{\Delta}^{-1} \circ ن^{-1} = ت_{\Delta'} \circ ت_{\Delta} \circ ن^{-1}$

أي أن $ت^{-1}$ تساوي قياس، ندعوه تساوي القياس العكسي لتساوي قياس ت .

نتيجة :

إن مجموعة تساويات القياس لها بنية زمرة بواسطة العملية $(\circ)$.

6 – الإزاحة وضد الإزاحة :

إن كل تساوي قياس هو مركب عدد من التناظرات العمودية.

فإذا كان عدد المستقيمات واحد أو ثلاثة دعوناه ضد إزاحة.

وإذا كان عدد المستقيمات صفرا أو إثنين دعوناه إزاحة.

أي أن الإزاحة هي تساوي قياس يحافظ على الاتجاه فنقول : بفرض :

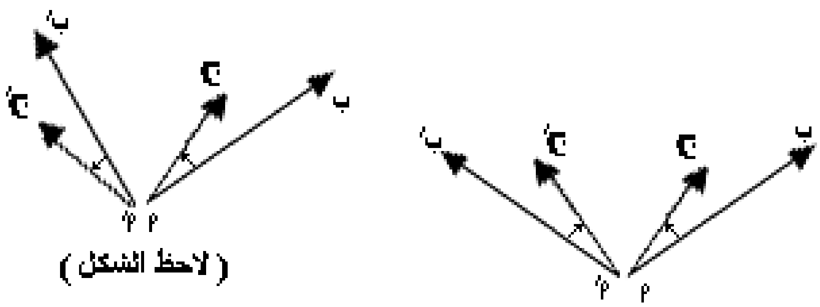
$$\text{أ} \xrightarrow{\text{ت}} \text{أَ}$$

$$\text{ب} \xrightarrow{\text{ت}} \text{بَ}$$

$$\forall\ \text{ن} \in \pi :\ \text{ن} \xrightarrow{\text{ت}} \text{نَ}$$

ت إزاحة $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{أن} = \text{أَ نَ} \\ \left(\overrightarrow{\text{أب}} ، \overrightarrow{\text{أن}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\text{أَ بَ}} ، \overrightarrow{\text{أَ نَ}}\right)\ [2\pi] \quad (*) \end{cases}$

وتُدعى أحيانا تساوي قياس مباشر .



(لاحظ الشكل)

كما أن ضد الإزاحة هي تساوي قياس يعكس الاتجاه أي :

$\left(\overrightarrow{\text{أب}} ، \overrightarrow{\text{أن}}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{\text{أَ بَ}} ، \overrightarrow{\text{أَ نَ}}\right)\ [2\pi]$ (*) (أنظر الشكل) .

لاحظ أن كلا من التحويل الحيادي والانسحاب والدوران هو إزاحة. وأن التناظر العمودي هو ضد إزاحة .

7 - تركيب إزاحتين :

بالاعتماد على علاقة شال في الزوايا نجد أن :

- مركب إزاحتين هو إزاحة .
- مركب ضد إزاحتين هو إزاحة .
- مركب إزاحة مع ضد إزاحة هو ضد إزاحة .

8 - نتيجة :

مجموعة الإزاحات لها بنية زمرة بواسطة العملية (o) .

يكتفي أن نبرهن أن التحويل العكسي للآزاحة هو إزاحة لأن :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ا نَ} = \text{ا ن} \\ \left(\overrightarrow{\text{اَ بَ}} ، \overrightarrow{\text{اَ نَ}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\text{ا ب}} ، \overrightarrow{\text{ا ن}}\right) [2\pi] \end{cases}$$

وهو شرط الإزاحة . إذن ت^{-1} إزاحة .

9 - تمارين التصحيح الذاتي :

9 - 1 - نعتبر المستوي (π) المزود بمعلم نظامي $\left(\text{م} ، \vec{\text{و}} ، \vec{\text{ي}}\right)$، التحويل ت : (π) ← (π)

ن (س ، ع) ⟼ نَ (سَ ، عَ)

$$\text{حيث :} \begin{cases} \text{سَ} = \frac{4}{5}\text{س} - \frac{3}{5}\text{ع} \\ \text{عَ} = \frac{3}{5}\text{س} + \frac{4}{5}\text{ع} \end{cases}$$

1 - أوجد مجموعة النقط الصامدة وفق ت .

2 - بين أن : م ن = م نَ من أجل كل نقطة ن من المستوي (π) .

و بفرض ا = ت (ا) . أثبت أن : ا ن = ا نَ .

3 - أحسب الزاوية $\left(\overrightarrow{\text{م ن}} = \overrightarrow{\text{م نَ}}\right)$ ثم تعرّف على طبيعة التحويل ت

10 - أجوبة التصحيح الذاتي :

10 - 1 - ن (س،ع) صامدة ⇔
$$\begin{cases} س = \frac{4}{5}س - \frac{3}{5}ع \\ ع = \frac{3}{5}س + \frac{4}{5}ع \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} س + 3ع = 0 \\ 3س - ع = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} س = 0 \\ \text{و} \\ ع = 0 \end{cases}$$

إذن م (0، 0) النقطة الصامدة الوحيدة وفق التحويل ت.

2 - حسب دستور البعد بين نقطتين نجد :

$$م\,نَ^2 = \left(\frac{4}{5}س - \frac{3}{5}ع\right)^2 + \left(\frac{3}{5}س + \frac{4}{5}ع\right)^2 = س^2 + ع^2 = م\,ن^2$$

ومنه م نَ = م ن .

وبفرض أ (س$_1$ ، ع$_1$)

$$أَ\,نَ^2 = \left[\frac{4}{5}(س-س_1) - \frac{3}{5}(ع-ع_1)\right]^2 + \left[\frac{3}{5}(س-س_1) + \frac{4}{5}(ع-ع_1)\right]^2 = (س-س_1)^2 + (ع-ع_1)^2 = أ\,ن^2$$

إذن أ ن = أَ نَ

3 - لدينا : $\overleftarrow{م\,نَ} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}س - \frac{3}{5}ع \\ \frac{3}{5}س + \frac{4}{5}ع \end{pmatrix}$ ؛ $\overleftarrow{م\,ن} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$.

وحسب تعريف الجداء السلمي :

$$\text{تجب}\left(\overleftarrow{م\,ن} ، \overleftarrow{م\,نَ}\right) = \frac{\overleftarrow{م\,ن} \cdot \overleftarrow{م\,نَ}}{\left\|\overleftarrow{م\,ن}\right\| \cdot \left\|\overleftarrow{م\,نَ}\right\|}$$

ليكن م ن = م نَ = $\sqrt{س^2 + ع^2}$

أي : $\text{تجب}\left(\overrightarrow{\text{م ن}}،\overrightarrow{\text{م نَ}}\right)=\dfrac{\text{س}\left(\frac{4}{5}\text{س}-\frac{3}{5}\text{ع}\right)^{2}+\text{ع}\left(\frac{3}{5}\text{س}+\frac{4}{5}\text{ع}\right)}{\text{س}^{2}+\text{ع}^{2}}$

وبعد الاختصار نجد : $\text{تجب}\left(\overrightarrow{\text{م ن}}=\overrightarrow{\text{م نَ}}\right)=\dfrac{4}{5}$.

وبفرض $\overrightarrow{\text{م ن}}\begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ع}\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{\text{مَ نَ}}\begin{pmatrix}\text{سَ}\\ \text{عَ}\end{pmatrix}$ ولنفرض $\overrightarrow{\text{م هـ}}\begin{pmatrix}\text{عَ}\\ -\text{سَ}\end{pmatrix}$.

أي أن : $\overrightarrow{\text{م هـ}}.\overrightarrow{\text{م نَ}}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{م هـ}}\perp\overrightarrow{\text{م نَ}}$.

وحسب علاقة شال في الزوايا فإن :

$\left(\overrightarrow{\text{م ن}}،\overrightarrow{\text{م نَ}}\right)=\left(\overrightarrow{\text{م هـ}}،\overrightarrow{\text{م نَ}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{\text{م هـ}}،\overrightarrow{\text{م ن}}\right)+2\pi\text{ك}$. / ك ∋ ص .

$\left(\overrightarrow{\text{م ن}}،\overrightarrow{\text{م نَ}}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\left(\overrightarrow{\text{م هـ}}،\overrightarrow{\text{م ن}}\right)+2\pi\text{ك}$ / ك ∋ ص .

و حسب خواص الزاويتان المتتامتان فإن :

$\text{جب}\left(\overrightarrow{\text{م ن}}،\overrightarrow{\text{م نَ}}\right)=\text{تجب}\left(\overrightarrow{\text{م هـ}}،\overrightarrow{\text{م ن}}\right)$

وبالاعتماد على الجداء السلمي $\overrightarrow{\text{م هـ}}.\overrightarrow{\text{م ن}}$ نجد :

$\text{جب}\left(\overrightarrow{\text{م ن}}=\overrightarrow{\text{م نَ}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{\text{م هـ}}.\overrightarrow{\text{م ن}}}{\left\|\overrightarrow{\text{م هـ}}\right\|.\left\|\overrightarrow{\text{م ن}}\right\|}=\dfrac{\text{س عَ}-\text{ع سَ}}{\text{س}^{2}+\text{ع}^{2}}$

أي $\text{جب}\left(\overrightarrow{\text{م ن}}=\overrightarrow{\text{م نَ}}\right)=\dfrac{\text{س}\left(\frac{3}{5}\text{س}-\frac{4}{5}\text{ع}\right)^{2}+\text{ع}\left(\frac{4}{5}\text{س}-\frac{3}{5}\text{ع}\right)^{2}}{\text{س}^{2}+\text{ع}^{2}}=\dfrac{3}{5}$

إذن نعلم أنه توجد زاوية α بحيث، $\text{تجب}\ \alpha=\dfrac{4}{5}$ وَ $\text{جب}\ \alpha=\dfrac{3}{5}$.

فالتحويل هو دوران مركزه م وزاويته α المحددّة بالنسبتين السّابقتين .

التشابه

ملاحظة : هذا الدرس غير مقرّر لتلاميذ شعبة (ع.ط.ح) ماعدا نتيجة العنصر 3.

الهدف من الدرس :

التعرف على تركيب تساوي قياس مع تحاكي أو العكس.

المدة اللازمة لدارسته : 05 ساعات.

الدروس الواجب مراجعتها : التحاكي وتساوي القياس.

المراجع : الكتاب المدرسي للسنة 3 ث / ع + ر المعهد التربوي الوطني.

تصميم الدرس

1 - تعريف التشابه.

2 - خواص التشابه.

3 - الخاصة المميزة للتشابه المباشر.

4 - تركيب تشابهين.

5 - العبارة التحليلية للتشابه.

6 - أسئلة التّصحيح الذّاتي.

7 - الأجوبة.

1 - تعريف :

التشابه هو مركب تساوي قياس مع تحاكي أو العكس.
وإذا كان تساوي القياس إزاحة دعوناه تشابها مباشر.
وإذا كان تساوي القياس ضد إزاحة دعوناه تشابها غير مباشر (خارج البرنامج).

• ملاحظة :

بفرض نقطة ثابتة ، ك > 0 عندئذ حسب خواص التحاكي

حـ (م ، −ك) = حـ (م ، −1)o حـ (م ، ك) = حـ (م ، ك) o حـ (م ، −1)

ولكن حـ (م ، −1) = ر (م ، π) = ت$_م$ وهو إزاحة.

فإذا كانت هـ ، هـَ ، هـً ثلاث إزاحات عندئذ :

هـ o حـ (م ، −ك) = هـ o ت$_م$ o حـ (م ، ك) = هـَ o حـ (م ، ك) .

حيث هـ o ت$_م$ = هـَ . لأن مركب إزاحتين هو إزاحة .

ثم إن : حـ (م ، −ك) o هـ = حـ (م، ك)o ت$_م$ o هـ = حـ (م ، ك)o هـً.

حيث ت$_م$ o هـ = هـً .

إذن كل تشابه مباشر هو مركب تحاكي نسبته موجبة مع تساوي قياس أو العكس.
نسمي ك نسبة التشابه (نسبة التحاكي).
نسميθ زاوية (تساوي القياس) زاوية التشابه.

• حالة خاصة :

إذا كان مركز التحاكي هو مركز الدوران (الإزاحة) أي :

س = حـ (م ، ك) o ر (م ، θ) فإننا نرمز للتشابه بالرمز : س (م ، ك ، θ) .

حيث تدعى مركز التشابه وهي النقطة الصامدة الوحيدة في هذه الحالة .

2 - خواص التشابه :

1 - التشابه مركب تقابلين فهو تقابل وبالتالي له تحويل عكسي .

س = د o هـ ⇔ س$^{-1}$ = هـ$^{-1}$ o د$^{-1}$ و لكن هـ$^{-1}$ = هـَ مقلوب إزاحة زاويتها −θ و حـ$^{-1}$

هو تحاكي نسبته $\frac{1}{ك}$.

أي أن $س^{-1}$ هو تشابه نسبته $\frac{1}{ك}$ وزاويته $-\theta$.

2 – إذا كان : ك = 1 فإن حـ (م ، 1) = I_π .

والتشابه يصبح إزاحة فقط أي إما انسحاب أو دوران .

وإذا كان ك ≠ 1 وَ $\theta \equiv 0$ [2π] فالإزاحة هـ إما هي I_π أو انسحاب والتشابه هو تحاكي أو تحاكي مع انسحاب وهو أيضا تحاكي .

إذن مجموعة التحاكيات والإزاحات محتواة في مجموعة التشابهات.

3 – الخاصة المميزة للتشابه المباشر :

ليكن التحاكي حـ (م ، ك) ، ك> 0 والإزاحة ز زاويتهاθ.

عندئذ : س = ز o حـ تشابه مباشر .

$$\forall \text{ (ن ، ط) } \in (\pi)^2 : \left\{ \begin{array}{l} ن \xrightarrow{حـ} ن_1 \xrightarrow{ز} نَ \\ ط \xrightarrow{حـ} ط_1 \xrightarrow{ز} طَ \end{array} \right.$$

وحسب الخواص المميزة لكل منهما :

$$\overleftarrow{ن_1ط_1} = ك . \overleftarrow{ن ط} \text{ وَ } \left(\overleftarrow{ن ط} ، \overleftarrow{ن_1ط_1}\right) \ominus [2\pi]$$

$$\text{ثم } \overleftarrow{نَ طَ} ، \overleftarrow{ن_1ط_1} \text{ و} \left(\overleftarrow{ن_1ط_1} . \overleftarrow{نَ طَ}\right) \equiv \theta \; [2\pi]$$

نستنتج : $\overleftarrow{نَ طَ} = ك . ن ط \text{ و } \left(\overleftarrow{ن ط} . \overleftarrow{نَ طَ}\right) \equiv \theta \; [2\pi] \qquad (*)$

نسمي هاتين العلاقتين بالخاصة المميزة وسنبرهن العكس .

ليكن هـ تحويل نقطي ما يحقق المساواتين (*) حيث ك ، θ عددان مفروضان.

فإذا كان ك = 1 فإن هـ إزاحة زاويتها θ .

وإذا كان $\theta \equiv 0$ [2π] فإن هـ تحاكي موجب نسبته ك .

وإذا كان ك ≠ 1 وَ $\theta \neq 0$ عندها نفرض ؟ نقطة ما من المستوي بحيث :؟ = هـ (؟)

ولنفرض ر (مَ ، θ) دوران مركزه مَ بحيث : ؟ = ر (؟).

ولندرس التحويل الآتي : هَـ = ر (؟ ، θ) o حـ (؟ ، ك) .

$$\forall \text{ ن } \in \pi : \; ن \xrightarrow{حـ} ن_1 \xrightarrow{ز} نَ$$

وحسب الخواص المميزة :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{أن}_1} = \text{ك} . \overrightarrow{\text{أن}} \\ \left(\overrightarrow{\text{أن}} ، \overrightarrow{\text{أن}_1}\right) \equiv 0 \; [2\pi] \end{cases} \quad \text{وَ} \quad \begin{cases} \text{أن}_1 = \text{أنَ} \\ \left(\overrightarrow{\text{أن}_1} ، \overrightarrow{\text{أنَ}}\right) \equiv \theta \; [2\pi] \end{cases}$$

وبالتالي $\text{ن} \xrightarrow{\text{هَ}} \text{نً}$ ومن المساويات نجد :

$\overrightarrow{\text{أنً}} = \text{ك} . \overrightarrow{\text{أن}}$ وَ $\left(\overrightarrow{\text{أن}} ، \overrightarrow{\text{أنً}}\right) \equiv \theta \; [2\pi]$ (*) .

ولدينا $\text{أ} \xrightarrow{\text{هَ}} \text{أ}$ وبفرض ن نقطة اختيارية من المستوي : $\text{ن} \xrightarrow{\text{هـ}} \text{نَ}$

فحسب (*) : $\overrightarrow{\text{أنً}} = \text{ك} . \overrightarrow{\text{أن}}$ وَ $\left(\overrightarrow{\text{أن}} ، \overrightarrow{\text{أنَ}}\right) \equiv \theta \; [2\pi]$ (*).

وبمقارنة (*) مع (*) نجد ، نَ = نً (نَ ، نً منطبقتان).

إذن : $\forall$ ن $\in$ (π) : هـ(ن) = هَ (ن) $\Leftarrow$ هـ = هَ .

ولكن هَ تشابه لأنه تركيب تحاكي مع دوران. إذن هـ هو تشابه نسبته ك و زاويته θ

• **نتيجة :**

$\forall$ ن $\in$ (π) ، $\forall$ ط $\in$ (π) : $\text{ن} \xrightarrow{\text{هـ}} \text{نَ}$

$\text{ط} \xrightarrow{\text{هـ}} \text{طَ}$ عندئذ :

هـ تشابه مباشر $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \overrightarrow{\text{نَ طَ}} = \text{ك} . \overrightarrow{\text{ن ط}} \\ \left(\overrightarrow{\text{أن}} ، \overrightarrow{\text{نَ طَ}}\right) \equiv \theta \; [2\pi] \end{cases}$ حيث ك > 0 وَ θ عدد مفروض.

تدعى هاتان المساواتان بالخاصّة المميزّة للتشابه .

4 – تركيب تشابهين :

ليكن التشابهان : س وَ سَ نسبتاهما ك ، كَ وزاويتاهما θ ، θ .

عندئذ : $\forall$ (ن ، ط) $\in \pi^2$: $\text{ن} \xrightarrow{\text{س}} \text{ن}_1 \xrightarrow{\text{سَ}} \text{نَ}$

$\text{ط} \xrightarrow{\text{س}} \text{ط}_1 \xrightarrow{\text{سَ}} \text{طَ}$

وحسب الخاصّة المميزة :

$$\begin{cases} \text{ن}_1\text{ط}_1 = \text{ك . ن ط} \\ \text{نَ طَ} = \text{كَ . ن}_1\text{ ط}_1 \end{cases} \Leftarrow \overrightarrow{\text{نَ طَ}} = \text{كَ . ك . ن ط}$$

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\text{ن ط}} \text{ ، } \overrightarrow{\text{ن}_1\text{ ط}_1}\right) \equiv \theta \ [2\pi] \\ \left(\overrightarrow{\text{ن}_1\text{ ط}_1} \text{ ، } \overrightarrow{\text{نَ طَ}}\right) \equiv \theta' \ [2\pi] \end{cases} \Leftarrow \left(\overrightarrow{\text{ن ط}} \text{ ، } \overrightarrow{\text{نَ طَ}}\right) \equiv (\theta + \theta') \ [2\pi]$$

وهي الخاصّة المميزة للتشابه الذي نسبته ك . كَ وزاويته $\theta + \theta'$.

إذن مركب تشابهين هو تشابه.

• **نتيجة :**

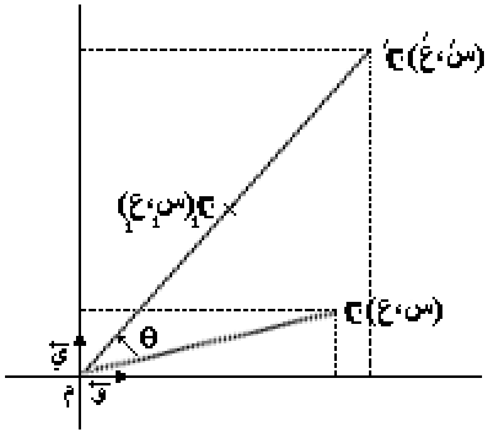
مجموعة التشابهات في المستوي لها بنية زمرة بالنسبة للعملية (o)

ملاحظة :

يُبرهن أن لكل تشابه نقطة صامدة وحيدة ندعوها مركز التشابه .

سنبرهن على وجودها بالاعتماد على الأعداد المركبة لصعوبة ذلك هندسيا و سنعتمد على وجودها الآن لإيجاد العبارة التحليلية للتشابه.

5 – العبارة التحليلية للتشابه :



بفرض المستوي (π) مزود بمعلم متعامد ومتجانس (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$) .

ولنعتبر التشابه س (م ، ك ، θ).

حي س = حـ (م ، ك) o ر (م ، θ).(مركز التحاكي هو مركز الدوران).

عندئذ : ن $\xrightarrow{\text{ر}}$ ن$_1$ $\xrightarrow{\text{حـ}}$ نَ

$$\begin{cases} \text{س}_1 = \text{س تجب}\theta - \text{ع جب }\theta \\ \text{ع}_1 = \text{س جب }\theta + \text{ع تجب }\theta \end{cases} \quad \text{وَ} \quad \begin{cases} \text{سَ} = \text{ك . س}_1 \\ \text{عَ} = \text{ك . ع}_1 \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} \text{سَ} = \text{ك}\left(\text{س تجب } \theta - \text{ع جب } \theta\right) \\ \text{عَ} = \text{ك}\left(\text{س جب} \theta + \text{ع تجب } \theta\right) \end{cases}$$

وبفرض ك تجب $\theta = \alpha$ وَ ك جب $\theta = \beta$.

فالعبارة العامة تكون من الشكل : $\begin{cases} \text{سَ} = \alpha \text{ س} - \beta \text{ع} \\ \text{عَ} = \beta \text{ س} + \alpha \text{ع} \end{cases}$

حيث م = $\begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 = \text{ك}^2$. فالمحدد هو مربع نسبة التشابه .

6 - أسئلة التصحيح الذاتي :

5 - 1 - ليكن المستوي (π) المزود بمعلم متعامد ومتجانس (م ، $\vec{\text{و}}$ ، $\vec{\text{ي}}$).

وليكن التحويل : ت : ن (س ، ع) $\longmapsto$ نَ (سَ ، عَ)

حيث $\begin{cases} \text{سَ} = \sqrt{3}\text{س} - \text{ع} \\ \text{عَ} = \text{س} + \sqrt{3}\text{ع} \end{cases}$

1 - أثبت أن ت تشابه يطلب تعيين عناصره المميزة.

2 - عين سابقة المستقيم (Δ): س $- \sqrt{3}$ع $+ 1 = 0$ وفق التحويل ت .

3 - أعط عبارة التحويل : ت$^{-1}$. ما هي محوّلة الدائرة : د (م ،1).

7 - الأجوبـة :

7 - 1 - لنبحث عن النقطة الصّامدة وفق التحويل ت :

$$\text{ن (س ، ع) صامدة} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{سَ} = \sqrt{3}\,\text{س} - \text{ع} \\ \text{عَ} = \text{س} + \sqrt{3}\,\text{ع} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}-1\right)\text{س} - \text{ع} = 0 \\ \text{س} + \left(\sqrt{3}-1\right)\text{ع} = 0 \end{cases}$$

ومنه س = 0 وَ ع = 0 . إذن م (0 ، 0) هي النقطة الصّامدة .

ثم إن : $\text{م نَ}^2 = \text{سَ}^2 + \text{عَ}^2 = \left(\sqrt{3}\,\text{س} - \text{ع}\right)^2 + \left(\text{س} + \sqrt{3}\,\text{ع}\right)^2 = 4\left(\text{س}^2 + \text{ع}^2\right) = 4\,\text{م ن}^2$

أي أن م نَ = 2 . م ن ومنه ك = 2 .

وبمطابقة عبارته مع عبارة التشابه نجد :

$$\begin{cases} \text{ك تجب}\,\theta = \sqrt{3} \\ \text{ك جب}\,\theta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{تجب}\,\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{جب}\,\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{أي}\ \theta \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

فالتحويل ت هو تشابه مركزه م ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{6}$.

2 - (Δَ) سابقة (Δ) ⟺ ت (Δَ) = (Δ) ⟺ (Δَ) = ت^{-1} (Δ) .

ولإيجاد محوّلة (Δ) وفق ت^{-1} نبحث عن عبارة التحويل العكسي وهو $\left(\text{ت}^{-1}\right)^{-1} = \text{ت}$.

ونعوض في معادلة (Δ) فنجد : $(\Delta') : \sqrt{3}\,\text{س} - \text{ع} - \sqrt{3}\left(\text{س} + \sqrt{3}\,\text{ع}\right) + 1 = 0$

أي : $-4\text{ع} + 1 = 0$ أو $\text{ع} = \frac{1}{4}$.

3 - لإيجاد عبارة ت^{-1} نبحث عن س ، ع بدلالة سَ ، عَ فنجد :

$$\text{ت}^{-1} : \begin{cases} \text{س} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\text{سَ} + \dfrac{1}{4}\,\text{عَ} \\ \text{ع} = -\dfrac{1}{4}\,\text{سَ} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\text{عَ} \end{cases}$$

ولكن معادلة الدائرة : $\text{س}^2 + \text{ع}^2 = 1$ لأن : [د (م ، 1)] .

نعوّض : $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\text{س}' + \frac{1}{4}\text{ع}'\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\text{س}' + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{ع}'\right)^2 = 1$.

وبعد التبسيط نجد : $\text{س}'^2 + \text{ع}'^2 = 4$.

وهي دائرة دَ (م ، 2) .

تمثيل التحويلات النقطية في المستوي المركب

الهدف من الدرس : تعريفك بصيغ جديدة للتحويلات النقطية وذلك باعتبارها تطبيقات من ℂ في ℂ .

المدة اللازمة لدارسته : 06 ساعات.

الدروس الواجب مراجعتها :

* التحويلات النقطية في المستوي (الدراسة التحليلية).

* الأعداد المركبة.

المراجع : كتاب الرياضيات للسنة 3 ث/ ع+ر المعهد التربوي الوطني.

تصميم الدرس

- تمهيد.

1 - تعريف التحويل النقطي في المستوي المركب.

2 - تطبيقات.

3 - العبارة المركبة للتشابه.

4 - المسألة العكسية.

5 - خلاصة.

6 - أسئلة التّصحيح الذّاتي.

7 - الأجوبة.

تمهيد :

درسنا التحويلات النقطية دراسة تحليلية، وفي هذا البحث نحاول التعرّف على صيغ جديدة للتحويلات النقطية، الشيء الذي يُسهل العمل والحسابات المعقّدة .

فالتحويل النقطي ت : $(\pi) \longleftarrow (\pi)$

ن ↤ نَ

يقابله التطبيق ها : م ← م

ص ↤ صَ

حيث ص ، صَ لاحقتا النقطتين ن ، نَ على الترتيب.

1 – تعريف :

ليكن التحويل النقطي ل : $(\pi) \longleftarrow (\pi)$

ن ↤ نَ

فمقابل كل عدد ص مركب يمكن إيجاد عدد مركب آخر صَ ، وهذا يعرّف تطبيقا تا : م ← م

ص ↤ تا(ص) = صَ

ندعوه " التطبيق المرفق بالتحويل ل " . ونقول تجاوزا أنه تحويل نقطي معرّف بالأعداد المركبة.

مثال : ل : $(\pi) \leftarrow (\pi)$

ن (س، ع) ↤ نَ (سَ ، عَ) / $\begin{cases} سَ = س^2 - ع^2 \\ عَ = 2 س ع \end{cases}$

عرّف التطبيق تا المرفق بالتحويل ل .

صَ = سَ + ت عَ / $ت^2 = -1$

$= س^2 - ع^2 + 2$ س ع ت $= ($ س + ت ع $)^2 =$ $ص^2$.

إذن : تا : م ← م

ص ↤ تا(ص) = $ص^2$.

• **ملاحظة :**

يمكن تعيين العبارة المركبة لتحويل نقطي انطلاقا من العبارته التحليلية والعكس صحيح.

• **مثال :**

تا : م ← م

ص ↦ تا(ص) = ت ص +1 − ت / $ت^2$ = −1 .

عين العبارة التحليلية للتحويل ل الموافق للتطبيق تا .

صَ = تا(ص) = ت ص + 1 − ت .

= ت (س + ت ع) + 1 − ت .

= (−ع + 1) + (س − 1) ت .

أي أن : سَ = −ع + 1 ، عَ = س − 1

إذن : ل : (π) ←(π) (π)

$$ن\ (س، ع) \mapsto نَ\ (سَ\ ،\ عَ)\ /\ \left\{\begin{array}{l} سَ = -ع + 1 \\ عَ = س - 1 \end{array}\right.$$

وهو تحويل تعرّفنا عليه سابقا، إنه دوران مركزه النقطة (1 ، 0) وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

2 – تطبيقات :

• بفرض ل انسحاب شعاعه$\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix} أ \\ جـ \end{pmatrix}$، نضع $ص_0$ =أ + ت جـ

ونعلم أن العبارة التحليلية للانسحاب ل هي :

$$\left\{\begin{array}{l} سَ = س + أ \\ عَ = ع + جـ \end{array}\right.$$

ومنه : صَ = سَ + ت عَ = س +أ + ت ع + ت جـ = س + ت ع +أ + ت جـ

صَ = ص + $ص_0$.

أي أن العبارة المركبة للانسحاب ل هي : صَ = ص + $ص_0$.

• بفرض ل تناظر عمودي حول محور الفواصل.

عندئذ : $\begin{cases} س' = س \\ ع' = -ع \end{cases}$

بنفس العمل السابق نجد أن : $ص' = \overline{ص}$. ($\overline{ص}$ هو مرافق ص)

• بفرض ل تناظر عمودي بالنسبة للمنصف الأول (ع = س)

عندئذ : $\begin{cases} س' = ع \\ ع' = س \end{cases}$ ومنه $ص' = ت\,\overline{ص}$. / $\overline{ص}$ هو مرافق ص .

• بفرض ل دوران ر (م ، θ) .عندئذ : $\begin{cases} س' = تجب\,\theta\, س - جب\,\theta\, ع \\ ع' = جب\,\theta\, س + تجب\,\theta\, ع \end{cases}$

ومنه : ص' = س' + ت ع'

= تجب θ س − جب θ ع + جب θ س ت + تجب θ ع ت.

= (تجب θ + ت جب θ) (س + ت ع)

= [1 ، θ] ص .

حيث يشير الرمز [1 ، θ] إلى عدد مركب طويلته 1 وعمدته θ.

• بفرض ل تشابه س (م ، ك ، θ) أو س (ω ، ك ، θ) .

نترك للقارئ إيجاد العبارة المركبة في كل حالة بنفس الطريقة.

وسنحاول إيجادها بطريقة أخرى إنطلاقا من التعريف الهندسي للتشابه .

3 - العبارة المركبة للتشابه : (ك ∋ ح*)

ليكن التشابه ل (ω ، ك ، θ) في المستوي (π) المزود بمعلم متعامد ومتجانس.

عندئذ : ∀ ن ∋ (π) : ل (ن) = ن' بحيث :

$$\begin{cases} \omega ن' = ك . \omega ن & (1) \\ \left(\overrightarrow{\omega ن} ، \overrightarrow{\omega ن'}\right) \equiv \theta\ [2\pi] & (2) \end{cases}$$

بفرض $ص_0$ لاحقة النقطة ω ، ص لاحقة ن ، ص' لاحقة ن' .

ومنه : لاحقة $\overrightarrow{\omega ن}$ هي $ص - ص_0$.

لاحقة $\overleftarrow{\omega ن'}$ هي ص' − $ص_0$.

و بالتعويض في العلاقتين (1) ، (2) السابقتين فإنهما تكتبان :

$$\begin{cases} \left| ص' - ص_0 \right| = ك . \left| ص - ص_0 \right| \\ عمدة\left(ص' - ص_0 \right) - عمدة\left(ص - ص_0 \right) \equiv \theta \; [2\pi] \end{cases}$$

وهذا يعني أن العدد المركب ص' − $ص_0$ ينتج من ضرب العدد المركب ص − $ص_0$ بعدد مركب طويلته ك وعمدته θ.

إذن : ص' − $ص_0$ = [ك ، θ] . (ص − $ص_0$) .

وباستخدام الشكل الأسي للأعداد المركبة فإن هذه العلاقة تكتب : ص' − $ص_0$ = ك . $هـ^{ت\theta}$. (ص − $ص_0$)

النتيجة :

العبارة المركبة للتشابه س الذي مركزه ω ($ص_0$) ونسبته ك وزاويته θ هي :

ص − $ص_0$ = ك . $هـ^{ت\theta}$. (ص' − $ص_0$) .... (*) .

حالات خاصّة :

1 − ك = 1 ، ل هو دوران مركزه ω و زاويته θ

وعبارته هي : ص' − $ص_0$ = $هـ^{ت\theta}$. (ص − $ص_0$)

2 − $\theta \equiv 0 \; [2\pi]$ وَ ك $\neq 1$.

ل هو تحاكي مركزه ω و نسبته ك .

وعبارته هي : ص' − $ص_0$ = ك (ص − $ص_0$) .

ملاحظة : يمكن كتابة العلاقة (*) كالآتي :

ص' = ك $هـ^{ت\theta}$ ص + (1 − ك $هـ^{ت\theta}$) $ص_0$.

أي ص' = أ ص + ب حيث أ $\in$ م ، ب $\in$ م .

4 − المسألة العكسية :

لندرس الآن التطبيقات المركبة الخطية. أي.

تا : م $\leftarrow$ م

ص ↤ تا(ص) = ٲ ص + ب / ٲ ∍ م* وَ ب ∍ م .

ولنَرى بأي تحويل يمكن أن نرفق هذا التطبيق .

- إذا كان ٲ = 1 ، عندئذ :

صَ = ص + ب وهو انسحاب.

- إذا كان ٲ ≠ 1 نبحث عن لاحقة النقطة الصامدة بالتطبيق تا.

$$\text{تا}(ص_0) = ص_0 \Leftrightarrow ص_0 = ٲ\,ص_0 + ب \Leftrightarrow ص_0 = \frac{ب}{1-ٲ} \ .$$

وعندئذ :
$$\begin{cases} صَ = ٲ\,ص + ب & \ldots\ldots\ (1) \\ ص_0 = ٲ\,ص_0 + ب & \ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

وبطرح (2) من (1) ينتج : صَ − $ص_0$ = ٲ (ص − $ص_0$)

وهي عبارة التشابه المباشر الذي مركزه ω($ص_0$) ونسبته $|ٲ|$ وزاويته θ (عمدة ٲ).

إذن مجموعة التحويلات المرفقة بالتطبيق :

ص ↤ صَ = ٲ ص + ب هي مجموعة الانسحابات أو التشابهات في المستوي .

5 - خلاصة :

* إذا كان ٲ = 0 ، ب = 0 هو التحويل الحيادي 1_π
  ب ≠ 0 هو انسحاب شعاعه الصورة الشعاعية للعدد المركب ب.

* ٲ ≠ 1 نعتبر ٲ = [ك ، θ] .

إما ك = 1 فالتحويل دوران ر (ω ، θ) حيث ω ($ص_0$)

$$ص_0 = \frac{ب}{1-ٲ} \ .$$

أو ك≠1 ،
$$\begin{cases} \theta \equiv 0\,[2\pi] & \text{تحاكي نسبته ك و مركزه } \omega\left(ص_0\right) \\ \theta \neq 0\,[2\pi] & \text{تشابه س } (\omega ، ك ، \theta) \end{cases}$$

6 –تمارين التصحيح الذاتي :

6 – 1 – عين في كل حالة طبيعة و عناصر التحويل المعرّف بالصيغة المركبة.

تا : ص ↤ صَ = ت ص + ت – 1 .

ها : ص ↤ صَ = (1 + ت) ص + 2 – 4 ت .

عا : ص ↤ صَ = (1 – ت) ص.

جا : ص ↤ صَ = – 2 ص + 1 – ت.

6 – 2 – في المستوي (π) المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر النقطتين د (3 ، 1) ، ب (4 ، 3).

أحسب إحداثيي النقطة بَ محوّلة ب وفق التشابه س(د ، 2 ، $\frac{\pi}{3}$).

6 – 3 – ليكن التحويل ل : ن (ص) ↤ نَ (صَ) حيث :

صَ = – $\frac{1}{2}$ ت ($\overline{ص}$ + 2 – 4 ت) .

وبفرض ت$_{م س}$ التناظر حول محور الفواصل.

1 – أثبت أن ل o ت$_{م س}$ تشابه ، عين عناصره المميزة.

2 – حلّل ل إلى مركب تناظر عمودي ت$_{ق}$ حيث (ق) يشمل النقطة ﺃ (–2 ، 0) مع تحاكي حا مركزه ﺃ ونسبته موجبة. (عين ق) .

7 – الأجوبـة :

7 – 1 – • الـتـطـبـيـق تـا هـو دوران لأن أ = ت = $[1 \text{ ، } \frac{\pi}{2}]$.

مـركـزه الـنـقـطـة ω الـتـي لاحـقـتـهـا $ص_0 = \frac{ب}{1-أ} = \frac{1-ت}{1-ت} = -1$.

أي ω (−1 ، 0).

إذن تـا هـو دوران ر [(−1 ، 0)، $\frac{\pi}{2}$] .

• الـتـطـبـيـق هـا هـو تـشـابـه لأن :

$أ = 1 + ت = \left[\sqrt{2} \text{ ، } \frac{\pi}{4}\right]$.

الـنـقـطـة الـصـامـدة ω لاحـقـتـهـا $ص_0 = \frac{2-4ت}{1-(1+ب)} = 4+2ت$.

أي أن :ω (4 ، 2) .

إذن هـا هـو تـشـابـه س [(4 ، 2) ، $\sqrt{2}$ ، $\frac{\pi}{4}$] .

• الـتـطـبـيـق عـا هـو تـشـابـه لأن :

$أ = 1 - ت = \left[\sqrt{2} \text{ ، } \frac{-\pi}{4}\right]$.

$ص_0 = 0$.

إذن عـا تـشـابـه س (م ، $\sqrt{2}$ ، $\frac{-\pi}{4}$) .

• الـتـطـبـيـق حـا هـو تـحـاكـي لأن : أ = −2 .

$ص_0 = \frac{1-ت}{1+2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}ت$.

إذن جـا هـو تـحـاكـي مـركـزه $\omega\left(\frac{1}{3} \text{ ، } -\frac{1}{3}\right)$ ونـسـبـتـه −2 .

7 – 2 – نـعـيـن الـعـبـارة الـمـركـبـة لـلـتـشـابـه س (د ، 2 ، $\frac{\pi}{3}$) .

لـديـنـا د ($ص_0$) حـيـث $ص_0$ = 3 + ت .

ونعلم أن العبارة العامة للتشابه هي :

صَ − ص$_0$ = [ك ، θ] . (ص − ص$_0$) .

أي : صَ − (3 + ت) = [2 ، $\frac{\pi}{3}$] . (ص − 3 − ت).

صَ − 3 − ت = 2 (تجب $\frac{\pi}{3}$ + ت جب $\frac{\pi}{3}$) (ص − 3 − ت).

صَ = (1 + ت $\sqrt{3}$) [ص − 3 − ت] + 3 + ت

ولدينا : ب (4 ، 3) لاحقتها ص = 4 + 3 ت .

فلآيجاد محوّلتها نعوّض في عبارة التحويل فنجد :

صَ = (1 + ت $\sqrt{3}$) [4 + 3 ت − 3 − ت] + 3 + ت .

صَ = (1 + ت $\sqrt{3}$) . (1 + 2 ت) + 3 + ت .

= 4 − 2 $\sqrt{3}$ + (3 + $\sqrt{3}$) ت .

إذن : بَ (4 − 2 $\sqrt{3}$ ، 3 + $\sqrt{3}$) .

7 – 3 –

1 – لدينا ل : ص ⟼ صَ = − $\frac{1}{2}$ ت ($\overline{\text{ص}}$ + 2 − 4 ت) .

ونعلم أن : ت$_{\text{م س}}$: ن (ص) ⟼ نَ (صَ) / صَ = $\overline{\text{ص}}$.

إذن : ص $\xrightarrow{\text{ت}_{\text{م س}}}$ ص$_1$ $\xrightarrow{\text{ل}}$ صَ

ل o ت$_{\text{م س}}$

ص$_1$ = $\overline{\text{ص}}$

صَ = − $\frac{1}{2}$ ت ($\overline{\text{ص}_1}$ + 2 − 4 ت) .

صَ = − $\frac{1}{2}$ ت (ص + 2 − 4 ت)

= − $\frac{1}{2}$ ت ص − ت − 2

وهي عبارة تشابه بحيث :

أ = − $\frac{1}{2}$ ت = [$\frac{1}{2}$ ، − $\frac{\pi}{2}$] .

$$\text{ص}_0 = \frac{-2-\text{ت}}{1+\frac{1}{2}\text{ت}} = \frac{-4-2\text{ت}}{2+\text{ت}} = -2$$

فالتشابه مركزه النقطة (-2 ، 0) ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

2 − وجدنا أن : ل o $\text{ت}_{\text{م س}}$ = س

بتركيب $\text{ت}_{\text{م س}}$ في الطرفين :

ل o $\text{ت}_{\text{م س}}$ o $\text{ت}_{\text{م س}}$ = س o $\text{ت}_{\text{م س}}$

أي : ل = س o $\text{ت}_{\text{م س}}$.

نحلّل التشابه إلى تركيب دوران مع تحاكي لهما نفس المركز أي :

ل = جا [(-2 ، 0)، $\frac{1}{2}$] o ر[(-2 ، 0)، $-\frac{\pi}{2}$] o $\text{ت}_{\text{م س}}$.

ولكن حسب تعريف الدوران فإنه يُحلل إلى تركيب تناظرين حول مستقيمين مارّين من النقطة (-2 ، 0) والزاوية بينهما $-\frac{\pi}{4}$.

نختار أولهما م س و ثانيهما (ق) وبالتعويض :

ل = حا [(-2 ، 0) ، $\frac{1}{2}$] o $\text{ت}_{\text{ق}}$ o $\text{ت}_{\text{م س}}$ o $\text{ت}_{\text{م س}}$

ل = حا [(-2 ، 0) ، $\frac{1}{2}$] o $\text{ت}_{\text{ق}}$.

حيث (ق) مستقيم مار من النقطة (-2 ، 0) ويصنع مع م س زاوية $-\frac{\pi}{4}$ ومنه : معادلة المستقيم (ق) هي : ع = − (س + 2).

فهرس السلسلة 4

تتضمن هذه السلسلة أربعة دروس هي :

- الإنسحاب في الفضاء.
- التحاكي في الفضاء.
- الدوران حول محور.
- التناظر بالنسبة إلى مستو.

ملاحظة :

هذه السلسلة موجهة إلى تلاميذ شعبة العلوم الدقيقة.

الانسحاب في الفضاء

الهدف من الدرس : - تمديد التعريف والخواص المدروسة في المستوي إلى الفضاء.

المدة اللازمة لدارسته : 06 ساعات.

الدروس التي ينبغي مراجعتها :

* الانسحاب في المستوي.

تصميم الدرس

1 - تعريف.
2 - خواص الانسحاب في الفضاء.
3 - العبارة التحليلية للانسحاب في الفضاء.
4 - تمارين التصحيح الذاتي.
5 - الأجوبة.

1- تـعـريـف :

نـرمـز إلـى مـجـموعـة نـقـط الـفـضـاء بـالـرمـز ف .

تـعـريـف :

$\overrightarrow{\text{ش}}$ شـعـاع فـي الـفـضـاء.

نـسـمـي انـسـحـابا فـي الـفـضـاء شـعـاعـه $\overrightarrow{\text{ش}}$ الـتـحـويـل الـنـقـطـي الـذي يـرفـق بـكـل نـقـطـة ن مـن الـفـضـاء الـنـقـطـة نَ بـحـيـث يـكـون : $\overrightarrow{\text{ن نَ}} = \overrightarrow{\text{ش}}$

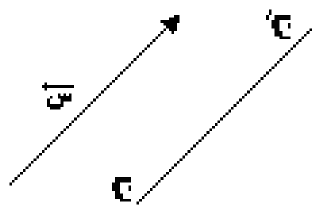
ونـرمـز إلـيـه بـالـرمـز $\text{ن}_{\overrightarrow{\text{ش}}}$.

$\text{ن}_{\overrightarrow{\text{ش}}}$: ف ← ف

ن ↤ نَ حـيـث $\overrightarrow{\text{ن نَ}} = \overrightarrow{\text{ش}}$

مـلاحـظـات :

- إذا كـان $\overrightarrow{\text{ش}} = \vec{0}$ فـإن كـل نـقـطـة مـن الـفـضـاء هـي نـقـطـة صـامـدة.



الانـسـحـاب الـذي شـعـاعـه مـعـدوم هـو الـتـحـويـل الـحـيـادي $1_{\text{ف}}$ ، أي : $\text{ن}_{\vec{0}} = 1_{\text{ف}}$

- إذا كـان $\overrightarrow{\text{ش}} \neq \vec{0}$ فـإنـه لا تـوجـد أيـة نـقـطـة صـامـدة.
- الانـسـحـاب $\text{ن}_{\overrightarrow{\text{ش}}}$ تـقـابـل لـلـفـضـاء فـي نـفـسـه وتـحـويـلـه الـعـكـسـي هـو الانـسـحـاب $\text{ن}_{-\overrightarrow{\text{ش}}}$ ،

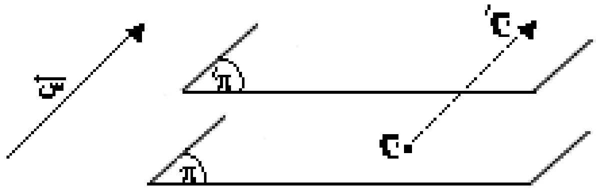
أي : $\text{ن}_{\overrightarrow{\text{ش}}}^{-1} = \text{ن}_{-\overrightarrow{\text{ش}}}$.

2 – خـواص الانـسـحـاب فـي الـفـضـاء :

2 – 1 – صـور بـعـض الأشـكـال الـهـنـدسـيـة :

- صـورة قـطـعـة مـسـتـقـيـمـة [أ ب] هـي قـطـعـة مـسـتـقـيـمـة [أَ بَ] تـقـايـس [أ ب] حـيـث أَ هـي صـورة أ و بَ هـي صـورة ب .
- صـورة مـسـتـقـيـم هـي مـسـتـقـيـم يـوازيـه.

• صورة مستو هي مستو يوازيه.



• صورة دائرة (د) هي دائرة (دَ) مركزها هو صورة مركز (د) ومستويها يوازي مستوي (د) ونصف قطرها يساوي نصف قطر (د).

2 – 2 – مركب انسحابين في الفضاء :

مركب الانسحابين في الفضاء $ن_{\overleftarrow{ش_1}}$ ، $ن_{\overleftarrow{ش_2}}$ هو الانسحاب في الفضاء $ن_{\overleftarrow{ش_1} + \overleftarrow{ش_2}}$.

مجموعة الانسحابات في الفضاء المزودة بقانون تركيب التحويلات هي زمرة تبديلية .

3 – العبارة التحليلية للانسحاب في الفضاء :

الفضاء ف منسوب إلى معلم $\left(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي} ، \overleftarrow{ك}\right)$.

$\overleftarrow{ش}$ شعاع من الفضاء، مركباته (ا ، ب ، حـ) .

نعتبر الانسحاب $ن_{\overleftarrow{ش}}$ الذي يرفق بكل نقطة ن (س ، ع ، ص) من الفضاء النقطة نَ

(سَ ، عَ ، صَ) .

يمكن أن نكتب : $ن_{\overleftarrow{ش}}$ (ن) = نَ $\Leftrightarrow$ $\overleftarrow{ن نَ} = \overleftarrow{ش}$

$$\Leftrightarrow \overleftarrow{م نَ} - \overleftarrow{م ن} = \overleftarrow{ش}$$

$$\Leftrightarrow \overleftarrow{م نَ} = \overleftarrow{م ن} + \overleftarrow{ش}$$

$$ن_{\overleftarrow{ش}}(ن) = نَ \Leftrightarrow \begin{cases} سَ = س + ا \\ عَ = ع + ب \\ صَ = ص + جـ \end{cases}$$

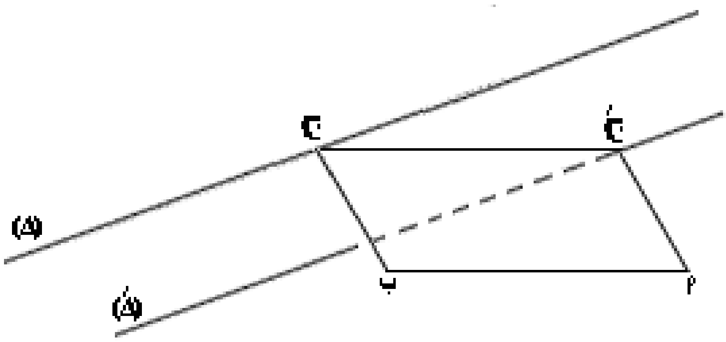
4 – تمارين التصحيح الذاتي :

4 – 1 – نعتبر في الفضاء مستقيما (∆) ونقطتين أ ، ب لا تنتميان معا إلى (∆).
لتكن ن نقطة متغيرة من (∆) وَ نَ الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع أ ب ن نَ . عيّن مجموعة النقط نَ .

4 – 2 – نعتبر في الفضاء نقطتين ثابتتين أ ، ب وَمستويا (π) .
لتكن ن نقطة متغيرة من (π) وَ جـ نظيرة أ بالنسبة إلى ن وَ نَ منتصف [ب جـ] .عيّن مجموعة النقط نَ .

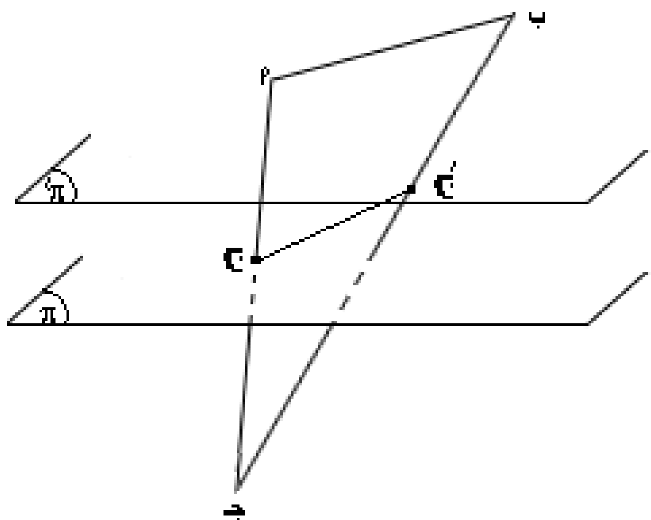
5 - الأجوبـة :

5 - 1 - حل التمرين 4 - 1 :



بما أن الرباعي أ ب ن نَ متوازي الأضلاع فإن : ن نَ = ب أ .
تبيّن هذه المساواة أن النقطة نَ هي صورة النقطة ن بالإنسحاب الذي شعاعه ب أ .
وبما أن النقطة ن تمسح المستقيم (Δ) فإن مجموعة النقط نَ هي المستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) بالانسحاب الذي شعاعه ب أ

5 - 2 - حل التمرين 4 - 2 :



نعتبر المثلث حـ أ ب . لدينا الاستلزام :

$$\left.\begin{array}{l} \text{ن منتصف } [\text{جـ أ}] \\ \text{نَ منتصف } [\text{ب جـ}] \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftarrow{\text{ن نَ}} = \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{أ ب}}$$

المساواة : $\overleftarrow{\text{ن نَ}} = \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{أ ب}}$.

تبيّن أن النقطة نَ هي صورة النقطة ن بالانسحاب الذي شعاعه $\frac{1}{2}\overleftarrow{\text{أ ب}}$.

وبما أن النقطة ن تمسح المستوي (π) فإن مجموعة النقط نَ هي المستوي (πَ) صورة المستوي (π) بالانسحاب الذي شعاعه $\frac{1}{2}\overleftarrow{\text{أ ب}}$.

التحاكي في الفضاء

- **الهدف من الدرس :** تمديد التعريف و الخواص المدروسة في المستوي إلى الفضاء
- **المدة اللازمة لدارسته :** 06 ساعات.
- **الدروس التي ينبغي مراجعتها :**
  * التحاكي في المستوي.

تصميم الدرس

1 - تعريف.

2 - خواص التحاكي في الفضاء.

3 - العبارة التحليلية للتحاكي في الفضاء.

4 - تمارين التصحيح الذاتي.

5 - الأجوبة.

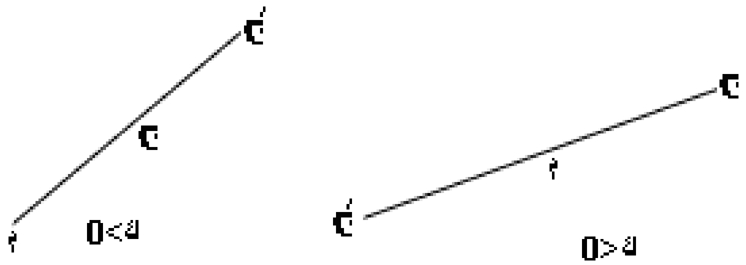
1- تـعـريـف :

نـرمـز إلـى مـجـموعـة نـقـط الـفـضـاء بـالـرمـز ف .

تـعـريـف :

ا نـقـطـة ثـابـتـة فـي الـفـضـاء ، ك عـدد حـقـيـقـي غـيـر مـعـدوم .
نـسـمـي تـحـاكـيـا مـركـزه م وَنـسـبـتـه ك الـتـحـويـل الـنـقـطـي الـذي يـرفـق بـكـل نـقـطـة ن مـن الـفـضـاء الـنـقـطـة نَ بـحـيـث يـكـون : $\overrightarrow{\text{م نَ}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{م ن}}$.

نـرمـز إلـى الـتـحـاكـي الـذي مـركـزه م وَ نـسـبـتـه ك بـالـرمـز حـ (م ، ك) .



2 - خـواص الـتـحـاكـي فـي الـفـضـاء :

2 - 1 - إذا كـان ك = 1 فـإن : حـ (م ، 1) = $1_{\text{ف}}$

حـيـث $1_{\text{ف}}$ هـو الـتـحـويـل الـحـيـادي لـلـفـضـاء .

إذا كـان ك = -1 فـإن : حـ (م ، -1) = $\text{ت}_{\text{م}}$

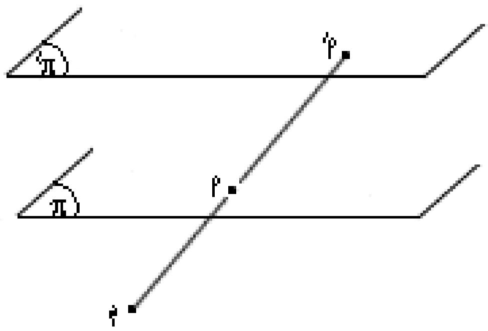
حـيـث $\text{ت}_{\text{م}}$ هـو الـتـنـاظـر بـالـنـسـبـة إلـى الـنـقـطـة م

- الـتـحـاكـي حـ (م ، ك) تـقـابـل لـلـفـضـاء فـي نـفـسـه وتـحـويـلـه الـعـكـسـي هـو الـتـحـاكـي حـ (م ، $\frac{1}{\text{ك}}$) أي :

حـ^{-1} (م ، ك) = حـ (م ، $\frac{1}{\text{ك}}$) .

2 - 2 - صـور بـعـض الأشـكـال الـهـنـدسـيـة :

- الـنـتـائـج فـيـمـا يـخـص صـورة قـطـعـة مـسـتـقـيـمـة، صـورة مـسـتـقـيـم هـي نـفـس الـنـتـائـج الـمـحـصـل عـلـيـهـا بـالـنـسـبـة إلـى الـتـحـاكـي فـي الـمـسـتـوي .
- صـورة مـسـتـو هـو مـسـتـو يـوازيـه .



حـ (أ) = أَ

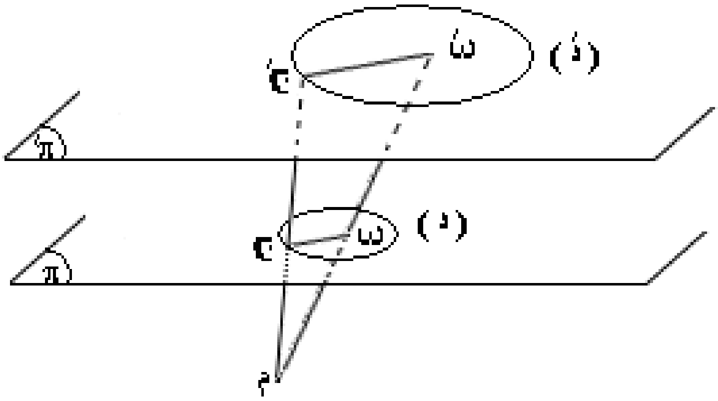
حـ (π) = π' .

إذا كـان : م ∍ (π) فـإن (π') = (π).

• صـورة دائـرة (د) مـركـزهـا ω وَنـصـف قـطـرهـا ر مـحـتـواة فـي مـسـتـو (π) هـي الـدائـرة (دَ) الـتـي مـركـزهـاω' هـو صـورة ω ونـصـف قـطـرهـا | ك|ر الـمـحـتـواة فـي الـمـسـتـوي (π') الـمـوازي لـلـمـسـتـوي (π) وَالـذي يـشـمـلω'.

مـلاحـظـة :

إذا كـان م ∍ π فـإن (دَ) ⊃ π .



حـ (π) = π' ، حـ (د) = (دَ) .

2 – 3 – مـركـب تـحـاكـيـن، مـركـب تـحـاكـيٍ وانـسـحـاب :

الـنـتـائـج الـمـحـصـل عـلـيـهـا فـي الـمـسـتـوي تُـمـدّد إلـى الـفـضـاء .

3 - العبارة التحليلية للتحاكي في الفضاء

الفضاء ف منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي} ، \overleftarrow{ك})$. نعتبر التحاكي حـ (ω ، ك) حيث ω
$(س_0 ، ع_0 ، ص_0)$
التحاكي حـ (ω ، ك) يرفق بكل نقطة ن (س ، ع ، ص)
النقطة نَ (سَ ، عَ ، صَ) بحيث يكون : $\overleftarrow{\omega نَ} = ك\, \overleftarrow{\omega ن}$
يمكن أن نكتب : $\overleftarrow{\omega نَ} = ك\, \overleftarrow{\omega ن} \Leftrightarrow \overleftarrow{م نَ} - \overleftarrow{م\omega} = ك \left(\overleftarrow{م ن} - \overleftarrow{م\omega}\right)$

$$\Leftrightarrow \overleftarrow{م نَ} = ك\, \overleftarrow{م ن} + (1 - ك)\, \overleftarrow{م\omega}$$

$$\overleftarrow{\omega\ نَ} = ك\, \overleftarrow{\omega ن} \Leftrightarrow \begin{cases} سَ = ك\, س + (1 - ك)\, س_0 \\ عَ = ك\, ع + (1 - ك)\, ع_0 \\ صَ = ك\, ص + (1 - ك)\, ص_0 \end{cases}$$

حالة خاصة :

إذا كان مركز التحاكي هو المبدأ م للمعلم فإن :

$$\overleftarrow{م\ نَ} = ك\, \overleftarrow{م ن} \Leftrightarrow \begin{cases} سَ = ك\, س \\ عَ = ك\, ع \\ صَ = ك\, ص \end{cases}$$

4 - تمارين التصحيح الذاتي :

4 - 1 - (π) مستو وَ أ ، ب نقطتان ثابتتان من الفضاء. نقطة ن تمسح دائرة ثابتة (د) مركزها م ونصف قطرها ر محتواة في المستوي (π). ليكنω مركز ثقل المثلث أ ن ب . عيّن مجموعة النقط ω.

4 - 2 - (د) دائرة مركز ω ونصف قطرها ر محتواة في مستو (π) . ن نقطة متغيرة من هذه الدائرة م نقطة ثابتة من الفضاء.

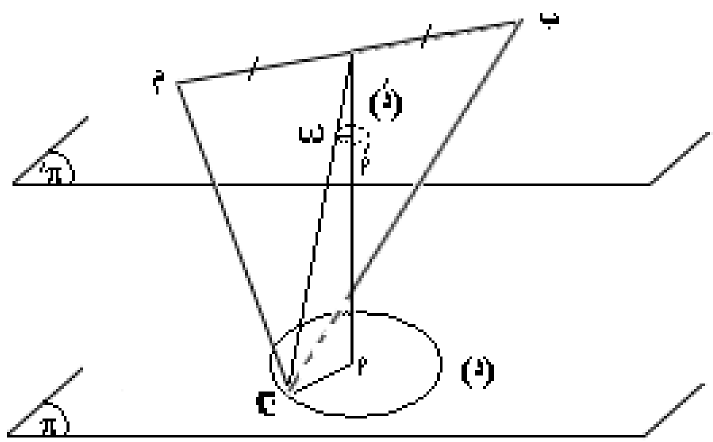
لتكن النقطة نَ من المستقيم (م ن) بحيث يكون : $\frac{\overline{نَ م}}{\overline{نَ ن}}$ = ك (ك عدد حقيقي

معطى) .

عيّن مجموعة النقط نَ .

5 - الأجوبة :

5 - 1 - حل التمرين 4 - 1 :



نعتبر المثلث نأ ب . ليكن هـ منتصف الضلع [أ ب].

مركز الثقل ω للمثلث نأ ب موجود على المتوسط (ن هـ) ولدينا : $\overleftarrow{هـω} = \frac{1}{3}\overleftarrow{هـ ن}$.

النقطة هـ ثابتة لأن النقطتين أ ، ب ثابتتان إذن، المساواة السابقة تبيّن أن النقطة ω

هي صورة النقطة ن بالتحاكي حـ (هـ ، $\frac{1}{3}$). النقطة ن تمسح الدائرة (د)، إذن

مجموعة النقط ω هي الدائرة (دَ) صورة الدائرة (د) بالتحاكي حـ (هـ ، $\frac{1}{3}$) .

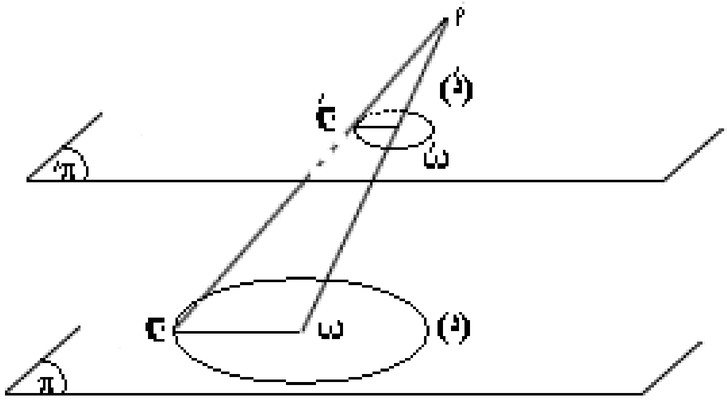
الدائرة (دَ) معينة كما يلي :

(دَ) محتواة في المستوي (πَ) صورة المستوي (π) بالتحاكي حـ (هـ ، $\frac{1}{3}$) .

مركزها مَ هو صورة م بالتحاكي حـ (هـ ، $\frac{1}{3}$) أو :

(πَ) ∩ (م هـ) = { مَ } .

- نصف قطرها هو $\frac{1}{3}$ ر .



5 - 2 - حل التمرين 4 - 2 :

• إذا كان ك = 0 فإن : $\frac{\overline{نَ م}}{\overline{نَ ن}} = 0 \Leftrightarrow \overline{نَ م} = 0$

⇔ نَ منطبقة على م

إذن ، مجموعة النقط نَ هي { م }.

• إذا كان ك ≠ 0 فإننا نستطيع أن نكتب :

$$\frac{\overline{نَ م}}{\overline{نَ ن}} = ك \Leftrightarrow \frac{\overline{نَ ن}}{\overline{نَ م}} = \frac{1}{ك}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{نَ ن} + \overline{م ن}}{\overline{نَ م}} = \frac{1}{ك}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{نَ م}}{\overline{نَ م}} + \frac{\overline{م ن}}{\overline{نَ م}} = \frac{1}{ك}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\overline{م ن}}{\overline{م نَ}} = \frac{1}{ك}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{م ن}}{\overline{م نَ}} = 1 - \frac{1}{ك} \qquad \Leftrightarrow \frac{\overline{م ن}}{\overline{م نَ}} = \frac{ك - 1}{ك}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\overline{\text{نَ م}}}{\overline{\text{نَ ن}}} = \text{ك}$ $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{\text{م نَ}}}{\overline{\text{م ن}}} = \dfrac{\text{ك}}{\text{ك} - 1}$

بما أن النقط الثلاث م.، ن ، نَ على استقامة واحدة فإن : $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{\text{م نَ}}}{\overline{\text{م ن}}} = \dfrac{\overline{\text{م نَ}}}{\overline{\text{م ن}}}$.

نستنتج أن : $\dfrac{\overleftarrow{\text{نَ م}}}{\overleftarrow{\text{نَ ن}}} = \text{ك}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\overleftarrow{\text{م نَ}}}{\overleftarrow{\text{م نَ}}} = \dfrac{\text{ك}}{\text{ك} - 1}$

$\Leftrightarrow \overleftarrow{\text{م نَ}} = \dfrac{\text{ك}}{\text{ك} - 1} . \overleftarrow{\text{م ن}}$

العلاقة : $\overleftarrow{\text{م نَ}} = \dfrac{\text{ك}}{\text{ك} - 1} . \overleftarrow{\text{م ن}}$.

تبيّن أن النقطة نَ هي صورة النقطة ن بالتحاكي حـ (م ، $\dfrac{\text{ك}}{\text{ك} - 1}$).

النقطة ن تمسح الدائرة (د)، إذن مجموعة النقط نَ هي الدائرة (دَ) صورة الدائرة (د) بالتحاكي حـ (م ، $\dfrac{\text{ك}}{\text{ك} - 1}$).

الدائرة (دَ) معينة كما يلي :

(دَ) محتواة في المستوي ($\bar{\pi}$) صورة المستوي (π) بالتحاكي حـ (م ، $\dfrac{\text{ك}}{\text{ك} - 1}$).

مركزها $\bar{\omega}$ هو صورة ω بالتحاكي حـ (م ، $\dfrac{\text{ك}}{\text{ك} - 1}$).

أو : ($\bar{\pi}$) $\cap$ (م ω) = $\{\bar{\omega}\}$.

- نصف قطرها هو $\left| \dfrac{\text{ك}}{\text{ك} - 1} \right|$ ر .

الـدوران حـول مـحـور

الـهـدف مـن الـدرس : لـقـد درسـنـا تـقـايـسا فـي الـفـضـاء وهـو الانـسـحـاب فـي الـفـضـاء. فـيـمـا يـلـي نـدرس تـقـايـسًـا آخـر وهـو الـدوران حـول مـحـور. الـبـرهـان بـالـتـراجـع

الـمـدة الـلازمــة لـدارسـتــه : 06 ســاعـات.

الدروس الـتـي يـنـبـغـي مـراجـعـتـهـا : الـدوران فـي الـمـسـتـوي.

تـصـمـيـم الـدرس

1 - الـفـضـاء الـمـوجـه.

2 - تـعـريـف الـدوران حـول مـحـور.

3 - خـواص الـدوران حـول مـحـور.

4 - الـعـبـارة الـتـحـلـيـلـيـة لـلـدوران حـول مـحـور.

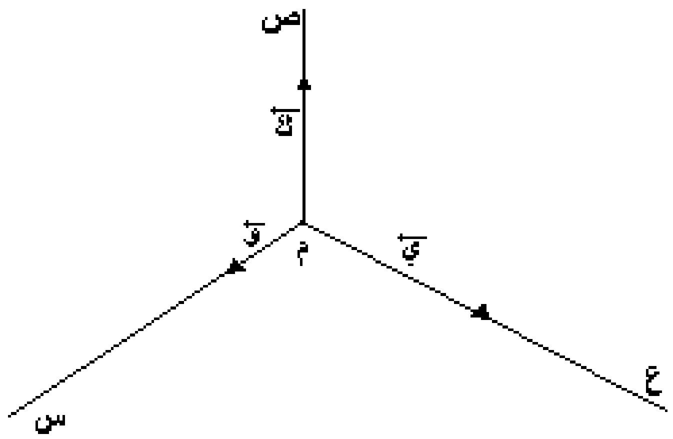
5 - تـمـاريـن الـتـصـحـيـح الـذاتـي.

6 - الأجـوبـة.

1 – الفضاء الموجه :

1 –1– تعريف :

الفضاء منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$ ، $\overleftarrow{ك}$)



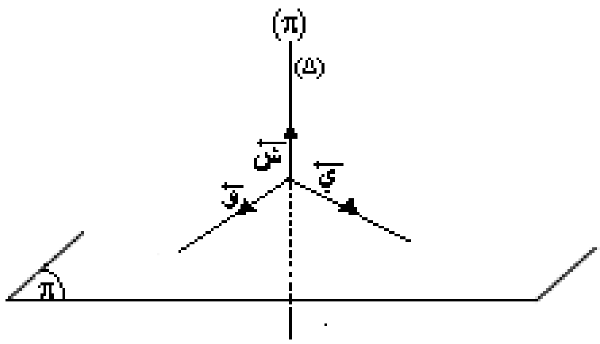
لنفرض أن ملاحظا موجود على (م ص)، رجلاه على النقطة م وينظر إلى داخل الثلاثية ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$ ، $\overleftarrow{ك}$)

نقول أن إتجاه الثلاثية ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$ ، $\overleftarrow{ك}$) هو الاتجاه المباشر (أو الموجب) إذا رأى الملاحظ (م س) على يمينه و(م ع) على يساره. ونقول أن اتجاه الثلاثية ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$ ، $\overleftarrow{ك}$) هو الاتجاه غير المباشر (أو السالب) إذا رأى الملاحظ (م س) على يساره و(م ، ع) على يمينه .

1 – 2 – توجيه المستوي بالنسبة إلى محور :

نرمز إلى المحور (Δ) الموجه بشعاع $\overleftarrow{ش}$ بالرمز $\Delta_{\overleftarrow{ش}}$ أو $\overleftarrow{\Delta}$ (إذا كان $\overleftarrow{ش}$ معلومًا).

(π) مستو منسوب إلى معلم ($\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)، $\Delta_{\overleftarrow{ش}}$ محور عمودي على المستوي (π).



بالتعريف، يكون توجيه المستوي (π) مباشراً بالنسبة إلى $\Delta_{\vec{\text{ش}}}$ إذا كانت الثلاثية

$\left(\vec{\text{م}} ، \vec{\text{و}} ، \vec{\text{ي}}\right)$ مباشرة، وإلا فتوجيه (π) يكون غير مباشر

1 – 3 – الزاوية الثنائية الموجهة :

(ط) ، (ك) نصفا مستويين حافتهما المشتركة (Δ) .

نرمز بالرمز [ط ، $\Delta_{\vec{\text{ش}}}$ ، ك] إلى الزاوية الثنائية التي حرفها (Δ) موجه بالشعاع $\vec{\text{ش}}$

((ط) هو الوجه الأول، (ك) الوجه الثاني).

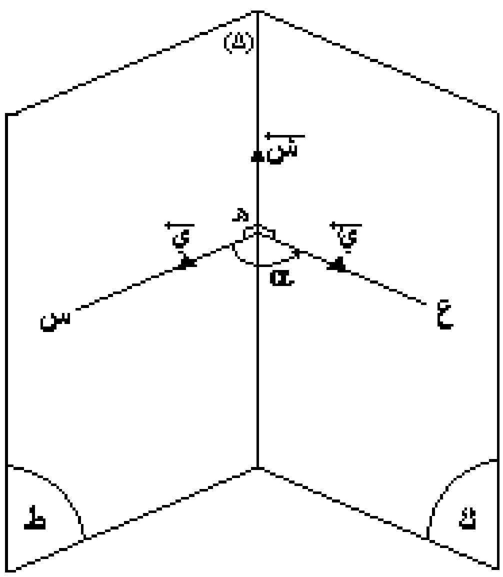
المستوي (π) العمودي على (Δ) يقطع (ط) ، (ك) وفق نصفي المستقيمين [هـ س ، [هـ ع . ليكن $\vec{\text{ي}}$ شعاع توجيه (هـ س) ، $\vec{\text{ي}}'$ شعاع توجيه (هـ ع) .

في المستوي (π) الموجه بالنسبة إلى المحور $\Delta_{\vec{\text{ش}}}$ ، يكون للمقطع القائم ($\vec{\text{ي}}$ ، $\vec{\text{ي}}'$)

قيس جبري α [2π] .

العدد α يسمى القيس الجبري للزاوية الثنائية الموجهة [ط ، $\Delta_{\vec{\text{ش}}}$ ، ك]

نكتب : [ط ، $\Delta_{\vec{\text{ش}}}$ ، ك] = ($\vec{\text{ي}}$ ، $\vec{\text{ي}}'$) $\equiv \alpha$ [2π] .



2 – تعريف الدوران حول محور :

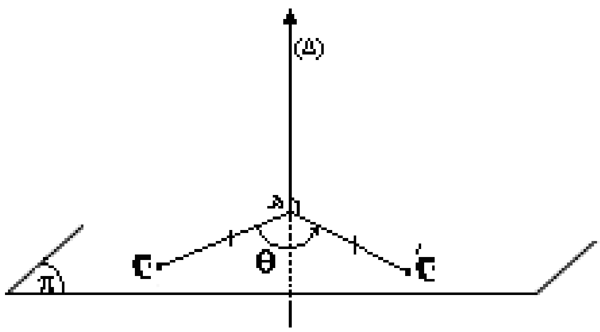
تعريف :

$\overleftarrow{\Delta}$ محور، θ عدد حقيقي .

الدوران حول المحور $\overleftarrow{\Delta}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة ن من الفضاء النقطة نَ المعرفة كما يلي :

– النقطة نَ تنتمي إلى المستوي (π) الذي يشمل النقطة ن والعمودي على المستقيم (Δ) في النقطة هـ .

– النقطة نَ ، في المستوي (π) ، هي صورة النقطة ن بالدوران المستوي الذي مركزه ω و زاويته θ.



نَ ∈ (π)

هـ ن = هـ نَ

($\overrightarrow{\text{هـن}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـنَ}}$) $\equiv \theta \; [2\pi]$

$\overleftarrow{\Delta}$ هو محور الدوران ، θ زاوية الدوران .

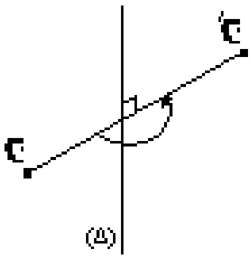
نرمز إلى الدوران الذي محوره $\overleftarrow{\Delta}$ وزاويته θ بالرمز : د ($\overleftarrow{\Delta}$ ، θ).

3 – خواص الدوران حول محور :

3 – 1 – • مجموعة النقط الصامدة هي المستقيم (Δ)، وهي فقط عندما $\theta \equiv 0 \; [\, 2\pi \,]$.

• إذا كان $\theta \equiv 0 \; [\, 2\pi \,]$ فإن : د ($\overleftarrow{\Delta}$ ، 0) = $1_{ف}$

حيث $1_{ف}$ هو التحويل الحيادي في الفضاء .



• إذا كـان $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$ فـإن : د $(\overleftarrow{\Delta}$ ، $\pi)$ = ت $_{\Delta}$
حيث ت $_{\Delta}$ هـو التنـاظر العمـودي بـالنسبة إلى المسـتقيـم (Δ).

• الـدوران د $(\overleftarrow{\Delta}$ ، $\theta)$ تقابـل لـلفضـاء فـي نـفسـه وتـحـويلـه الـعكسـي هـو الـدوران د $(\overleftarrow{\Delta}$ ، $-\theta)$ ، أي :

$$د^{-1}\ (\overleftarrow{\Delta}\ ،\ \theta) = د\ (\overleftarrow{\Delta}\ ،\ -\theta)\ .$$

3 – 2 – صـور بـعض الأشـكـال الـهـنـدسـيـة :

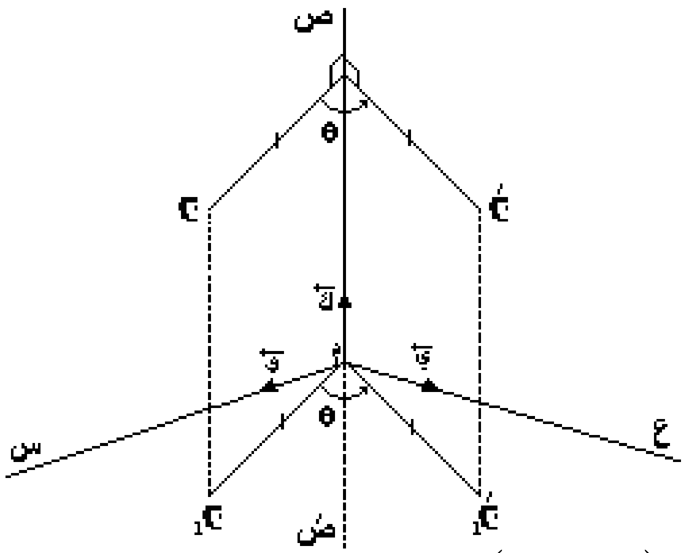
• صـورة قطعـة مسـتقيمـة [أ ب] هـي قطعـة مستقيمـة [أَ بَ] تقـايسـهـا (أَ هي صورة أ ، بَ هـي صورة ب).
نسـتنـتـج أن : الـدوران حـول مـحـور هـو تـقـايـس .

• صـورة مـسـتقيـم (ق) هـي مـسـتقيـم (قَ)
لـديـنـا الـحـالات الـخـاصـة الـتـالـيـة :
- إذا كـان : (ق) // (Δ) فـإن (قَ) // (Δ).
- إذا كـان : (ق) $\perp$ (Δ) فـإن (قَ) $\perp$ (Δ).
- إذا قـطـع (ق) الـمسـتقيـم (Δ) فـي الـنـقـطـة هـ فـإن (قَ) يـقـطـع الـمـسـتـقيـم (Δ) فـي الـنـقـطـة هـ.

4 – الـعـبـارة الـتـحـلـيـلـيـة لـلـدوران حـول مـحـور :

الفضـاء منسـوب إلـى معـلم متعـامد ومـتجانس $(م ، \vec{و} ، \vec{ي} ، \vec{ك})$ نعتبر الدوران د$(\overleftarrow{صَص}، \theta)$ الذي يرفق بكل نقطة ن (س، ع، ص) النقطة نَ (سَ، عَ، صَ)
لدينا : صَ = ص (لأن المستوي (هـ ن نَ) عمودي على المستقيم (صَ ص)).
لتكـن ن$_1$ المسـقط العمـودي للنـقطـة ن علـى المستوي (س م ع) ، ولتكـن نَ$_1$ المسـقط العمـودي لـلنـقطـة نَ على المسـتوي (س م ع).
فــي الـمســتـوي (س م ع) الـمـنـسـوب إلــى الـمـعـلـم الـمـتـعـامـد والـمـتـجـانـس $(\vec{م} ، \vec{و} ، \vec{ي})$، إحـداثـيـا ن$_1$ هـمـا (س ، ع) وَ إحداثـيـا نَ$_1$ هـمـا (سَ ، عَ) . فـي الـمسـتـوي (س م ع)، النقطـة نَ$_1$ هي صـورة النقطـة ن$_1$ بـالدوران المستوي الذي مركزه م وزاويـتـهθ .
إذن : سَ = س تـجب θ – ع جب θ

عَ = س جب θ + ع تجب θ .



نستنتج أن الدوران د($\overleftarrow{\text{صَ ص}}$ ، θ) يرفق بكل نقطة ن (س ، ع ، ص) النقطة نَ (سَ ، عَ ، صَ) حيث :

سَ = س تجبθ − ع جب α
عَ = س جب θ + ع تجب α
صَ = ص

5 – تمارين التصحيح الذاتي :

5 – 1 – الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$) .

ط ، θ عددان حقيقيان .

نعتبر الدوران د ($\overleftarrow{\text{م ص}}$ ، θ) والانسحاب ن $_{\text{ط}\overleftarrow{\text{ك}}}$.

نعرف التحويل ل كما يلي :ل = ن $_{\text{ط}\overleftarrow{\text{ك}}}$ o د ($\overleftarrow{\text{م ص}}$ ، θ) .

1 – عيّن العبارة التحليلية للتحويل ل .

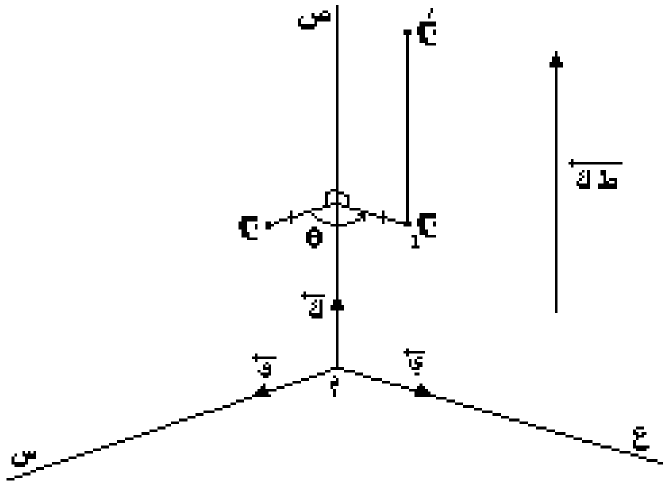
2 – بيّن أن ل تقابل. عيّن العبارة التحليلية للتحويل ل $^{1-}$.

3 – ليكن (ق) المستقيم الذي معادلته هي :
س = أ ص + جـ
ع = ب ص + د

عيّن معادلات المستقيم (قَ) صورة (ق) بالتحويل ل.

6 - الأجوبـة :

6 - 1 - حل التمرين 5 - 1 :



1 - الدوران د ($\overleftarrow{\text{م ص}}$ ، θ) يرفق بكل نقطة ن (س ، ع ، ص)
النقطة ن$_1$ (س$_1$ ، ع$_1$ ، ص$_1$) حيث :

س$_1$ = س تجب θ − ع جب θ
ع$_1$ = س جب θ + ع تجب θ
ص$_1$ = ص

والانسحاب ن$_{\overleftarrow{\text{طك}}}$ يرفق بالنقطة ن$_1$ (س$_1$ ، ع$_1$ ، ص$_1$)

النقطة نَ (سَ ، عَ ، صَ) حيث :
سَ = س$_1$
عَ = ع$_1$
صَ = ص$_1$ + ط

لأن مركبات الشعاع ط$\overleftarrow{\text{ك}}$ هي (0 ، 0 ، ط) .
نستنتج أن التحويل ل يرفق بكل نقطة ن (س ، ع ، ص)

النقطة نَ (سَ ، عَ ، صَ) حيث :

سَ = س تجبθ − ع جب θ
عَ = س جب θ + ع تجب θ
صَ = ص + ط

2 − • كل دوران تقابل وكل انسحاب تقابل، ونعلم أن مركب تقابلين هو تقابل. إذن التحويل ل تقابل.

• لدينا : ل$^{-1}$ =(ن$_{\overleftarrow{\text{ط ك}}}$ o د ($\overleftarrow{\text{م ص}}$ ، θ))$^{-1}$

= د$^{-1}$ ($\overleftarrow{\text{م ص}}$ ، θ) o ن$^{-1}_{\overleftarrow{\text{ط ك}}}$

ل$^{-1}$ = د ($\overleftarrow{\text{م ص}}$، − θ) o ن$_{\overleftarrow{\text{ط ك}}}$

الانسحاب ن$_{-\overleftarrow{\text{ط ك}}}$ يرفق بكل نقطة نَ (سَ ، عَ ، صَ) النقطة ن$_1$ (س$_1$ ، ع$_1$ ، ص$_1$)

حيث :

س$_1$ = سَ
ع$_1$ = عَ
ص$_1$ = صَ + ط

والدوران د ($\overleftarrow{\text{م ص}}$، −θ) يرفق نقطة ن$_1$ (س$_1$ ، ع$_1$ ، ص$_1$) النقطة ن (س ، ع ، ص) حيث :

س = س$_1$ تجب (−θ) − ع جب (−θ)
ع = س$_1$ جب (−θ) + ع تجب (−θ)
ص = ص$_1$

أي :

س = س$_1$ تجبθ − ع جب θ
ع = −س$_1$ جب θ + ع تجب θ
ص = ص$_1$

نستنتج أن التحويل ل$^{-1}$ يرفق بكل نقطة نَ (سَ ، عَ ، صَ) النقطة ن (س ، ع ، ص)

حيث :

$$\begin{cases} \text{س} = \text{سَ تجب}\theta - \text{عَ جب}\theta \\ \text{ع} = -\text{سَ جب}\theta + \text{عَ تجب}\theta \\ \text{ص} = \text{صَ} - \text{ط} \end{cases}$$

3 - $(\text{ق})\begin{cases} \text{س} = \text{أ ص} + \text{جـ} \\ \text{ع} = \text{ب ص} + \text{د} \end{cases}$

معادلات المستقيم (قَ) صورة المستقيم (ق) بالتحويل ل هي :

$$\begin{cases} \text{سَ تجب}\theta + \text{عَ جب}\theta = \text{أ}\,(\text{صَ} - \text{ط}) + \text{جـ} \\ -\text{سَ جب}\theta + \text{عَ تجب}\theta = \text{ب}\,(\text{صَ} - \text{ط}) + \text{د} \end{cases}$$

لنحل هذه الجملة باعتبار (سَ ، عَ) هي المجهول.

لنحسب محدد هذه الجملة :

$$\begin{vmatrix} \text{تجب}\theta & \text{جب}\theta \\ -\text{جب}\theta & \text{تجب}\theta \end{vmatrix} = \text{تجب}^2\theta + \text{جب}^2\theta = 1$$

نستنتج أن : $\text{سَ} = \begin{vmatrix} \text{أ}\,(\text{صَ} - \text{ط}) + \text{جـ} & \text{جب}\theta \\ \text{ب}\,(\text{صَ} - \text{ط}) + \text{د} & \text{تجب}\theta \end{vmatrix}$

$$\text{عَ} = \begin{vmatrix} \text{تجب}\theta & \text{أ}\,(\text{صَ} - \text{ط}) + \text{جـ} \\ -\text{جب}\theta & \text{ب}\,(\text{صَ} - \text{ط}) + \text{د} \end{vmatrix}$$

معادلات المستقيم (قَ) هي :

$$\begin{cases} \text{سَ} = \left[\text{أ}\,(\text{صَ} - \text{ط}) + \text{جـ}\right] \text{تجب}\theta - \left[\text{ب}\,(\text{صَ} - \text{ط}) + \text{د}\right] \text{جب}\theta \\ \text{عَ} = \left[\text{ب}\,(\text{صَ} - \text{ط}) + \text{جـ}\right] \text{تجب}\theta - \left[\text{أ}\,(\text{صَ} - \text{ط}) + \text{د}\right] \text{جب}\theta \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} س' = (ا\ جتب\,\theta - جب\,\theta)\,ص' + جـ\ جتب\,\theta - د\ جب\,\theta - ط\,(ا\ جتب\,\theta - جب\,\theta) \\ ع' = (ا\ جب\,\theta + ب\ جتب\,\theta)\,ص' + ج\ جب\,\theta + د\ جتب\,\theta - ط\,(ا\ جب\,\theta + ب\ جتب\,\theta) \end{cases}$$

الـتـنـاظـر الـعـمـودي بـالـنـسـبـة إلـى مـسـتـو

الـهدف من الدرس : الـوصـول إلـى الـنـتـيـجـة الـتـالـيـة :

كـل دوران حـول مـحـور أو إنسـحـاب يـمـكـن إعـتـبـاره مـركـب تـنـاظـريـن عـمـوديـيـن بـالـنـسـبـة إلـى مـسـتـويـيـن.

الـمـدة الـلازمـة لـدارسـتـه : 06 سـاعـات.

الـدروس الـتـي يـنـبـغـي مـراجـعـتـهـا :

* الانـسـحـاب فـي الـفـضـاء.
* الـدوران حـول مـحـور.

تـصـمـيـم الـدرس

1 - تـعـريـف.

2 - خـواص الـتـنـاظـر الـعـمـودي بـالـنـسـبـة إلى مـسـتـو.

3 - مـركـب تـنـاظـريـن عـمـوديـيـن بـالـنـسـبـة إلى مـسـتـويـيـن.

4 - تـمـاريـن الـتـصـحـيـح الـذاتـي.

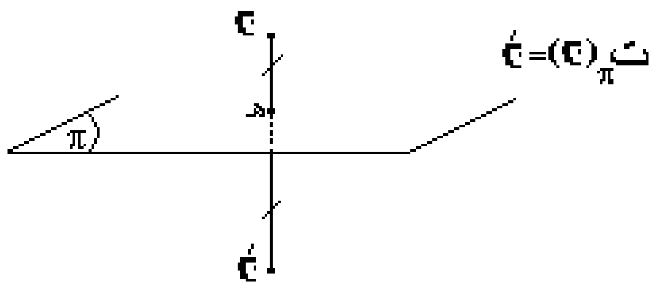
5 - الأجـوبـة.

1- تعريف :

(π) مستو .
التناظر العمودي بالنسبة إلى المستوي (π) هو التحويل النقطي للفضاء في نفسه الذي يرفق بكل نقطة ن النقطة نَ المعرفة كما يلي : $\overrightarrow{\text{هـ نَ}} = -\overrightarrow{\text{هـ ن}}$
حيث هـ المسقط العمودي للنقطة ن على المستوي (π)

نرمز إلى التناظر العمودي بالنسبة إلى المستوي (π) بالرمز : ت_π

$\text{ت}_\pi(\text{ن}) = \text{نَ}$



2 – خواص التناظر العمودي بالنسبة إلى مستو :

2 – 1 • مجموعة النقط الصامدة هي المستوي (π) .

• التناظر العمودي بالنسبة إلى المستوي (π) هو تضامن ، أي : $\text{ت}_\pi \circ \text{ت}_\pi = 1_{\text{ف}}$

فهو تقابل للفضاء في نفسه.

2 – 2 – صور بعض الأشكال الهندسية :

• صورة قطعة مستقيمة [أ ب] هي قطعة مستقيمة [أَ بَ] تقايسها (أَ هي صورة أ ، بَ هي صورة ب).

نستنتج أن :

التناظر العمودي بالنسبة إلى مستو تقايس .

• صورة مستقيم هي مستقيم، صورة نصف مستقيم هي نصف مستقيم، صورة زاوية قائمة هي زاوية قائمة.

• صورة مستو معيّن بثلاث نقط أ ، ب ، جـ ليست على استقامة واحدة هي المستوي المعيّن بالنقط أ ، بَ ، جَـ صور أ ، ب ، جـ .

• صورة دائرة (د) هي دائرة نصف قطرها يساوي نصف قطر (د) ومركزها صورة مركز (د) .

3 – مركب تناظرين عموديين بالنسبة إلى مستويين :

(π) ، (π') مستويان.

لندرس التحويل المركب :ت$_{\pi'}$ o ت$_{\pi}$.

ن نقطة من الفضاء .

لتكن ن$_1$ صورة ن بالتناظر ت$_{\pi}$ وَ لتكن نَ صورة ن$_1$ بالتناظر ت$_{\pi'}$

لدينا : (ت$_{\pi'}$ o ت$_{\pi}$) (ن) = نَ .

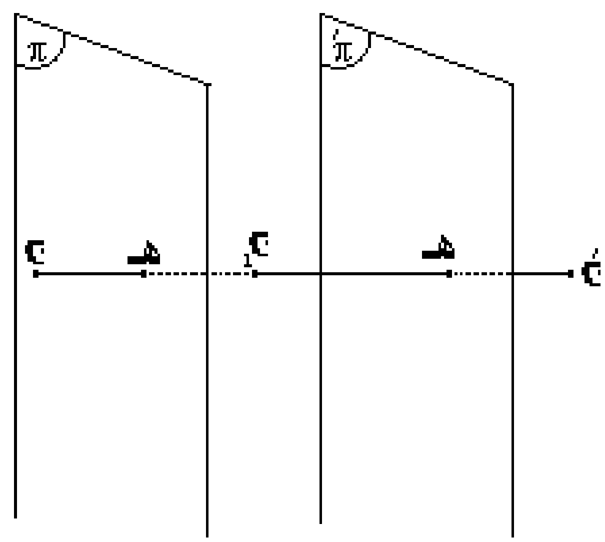
ندرس حالتين :

– المستويان (π) ، (π') متوازيان .

– المستويان (π) ، (π') متقاطعان.

3 – 1 – المستويان (π) ، (π') متوازيان :

• ليكن هـ ، هَـ مسقطي ن العموديين على المستويين (π) ، (π').



لدينا : $\overrightarrow{ن ن_1} = 2\overrightarrow{هـ ن_1}$ ، $\overrightarrow{ن_1 نَ} = 2\overrightarrow{ن_1 هَـ}$.

نستنتج أن : $\overrightarrow{ن نَ} = \overrightarrow{ن ن_1} + \overrightarrow{ن_1 نَ}$

$= 2\overrightarrow{هـ ن_1} + 2\overrightarrow{ن_1 هَـ}$

$= 2\left(\overrightarrow{هـ ن_1} + \overrightarrow{ن_1 هَـ}\right)$

$\overrightarrow{ن نَ} = 2\overrightarrow{هـ هَـ}$

هـذه العلاقة تعني أن نَ هي صورة ن بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{هـ هَـ}$، أي :

$نَ = ن_{2\overrightarrow{هـ هَـ}}(ن)$.

نستنتج أن : $ت_{\pi'} \circ ت_{\pi} = ن_{2\overrightarrow{هـ هَـ}}$.

نظرية :

مركب تناظرين عموديين بالنسبة إلى مستويين موازيين (π)، (π') هو إنسحاب شعاعه $2\overrightarrow{هـ هَـ}$ حيث هـ نقطة من (π) وَ هَـ مسقطها العمودي على (π').

- وبالعكس، ليكن $ن_{\vec{ش}}$ انسحاب في الفضاء.

هـ نقطة من الفضاء ، هَـ النقطة المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{هـ هَـ} = \frac{1}{2}\vec{ش}$

ليكن (π) ، (π') المستويين العموديين على المستقيم (هـ هَـ) في هـ و هَـ على الترتيب .

لدينا : $(\pi) // (\pi')$.

حسب النظرية السابقة فإن الانسحاب $ن_{\vec{ش}}$ يساوي التحويل المركب $ت_{\pi'} \circ ت_{\pi}$.

نظرية :

كل انسحاب هو مركب تناظرين عموديين بالنسبة إلى مستويين متوازيين .

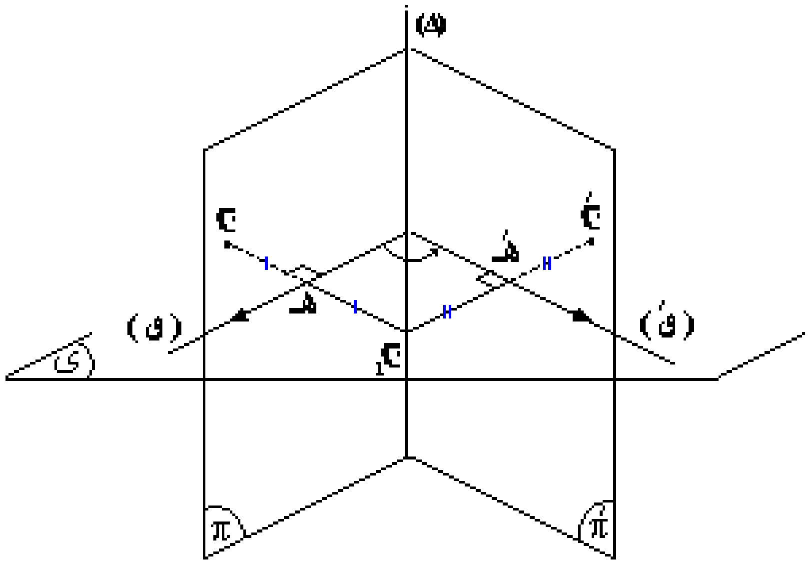
3 – 2 – المستويان (π) ، (π') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

نوجه المستقيم (Δ) وهذا يوجه كل المستويات العمودية على (Δ) .

ليكن (ى) المستوي العمودي على (Δ) والذي يشمل النقطة ن .

لدينا : $ن_1 \in$ (ى) ، $نَ \in$ (ى) .

لتكن م نقطة تقاطع المستوي (π) والمستقيم (Δ).
(ق) ، (قَ) هما المستقيمان حيث :
(ق) = (π) ∩ (ى) ، (قَ) = (π') ∩ (ى) .



في المستوي (ى) ، المستقيم (ق) هو محور القطعة [ن ن$_1$] والمستقيم (قَ) هو محور القطعة [ن$_1$ نَ] لأن :

(ن ن$_1$) ⊥ (ق) وَ هـ منتصف [ن ن$_1$] ينتمي إلى (ق) .
وَ (ن$_1$ نَ) ⊥ (قَ) وَ هَـ منتصف [ن$_1$ نَ] ينتمي إلى (قَ) . .
إذن :
في المستوي (ى)، النقطة نَ هي صورة ن بالتحويل المركب : تقَ o تق .
حيث تق هو التناظر العمودي بالنسبة إلى المستقيم (ق) .
وَ تقَ هو التناظر العمودي بالنسبة إلى المستقيم (قَ) .
ينتج من هذا أن نَ هي صورة ن بالدوران الذي مركزه م .
وزاويته 2$(\overleftarrow{ق} ، \overleftarrow{قَ})$ حيث $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{قَ}$ شعاعًا توجيه المستقيمين (ق) ، (قَ).
حسب تعريف الدوران حول محور ، النقطة نَ هي صورة ن بالدوران الذي محوره $\overleftarrow{\Delta}$ وزاويته 2$(\overleftarrow{ق} ، \overleftarrow{قَ})$.
نستنتج أن : ت$_{\pi'}$ o ت$_{\pi}$ = د ($\overleftarrow{\Delta}$ ، 2$(\overleftarrow{ق} ، \overleftarrow{قَ})$).

نظرية :

مركب تناظرين عموديين بالنسبة إلى مستويين متقاطعين وفق مستقيم (Δ) هو دوران محوره (Δ).

حالة خاصة :

إذا كان : $(\overrightarrow{ق}, \overleftarrow{ق}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ فإن $2(\overrightarrow{ق}, \overleftarrow{ق}) \equiv \pi\ [2\pi]$

ونعلم أن : $د(\overleftarrow{\Delta}, \pi) = ت_{\Delta}$

إذن ، مركب تناظرين عموديين بالنسبة إلى مستويين عموديين هو تناظر عمودي بالنسبة إلى مستقيم تقاطعهما.

- وبالعكس، ليكن دوران $د(\overleftarrow{\Delta}, \theta)$.

ليكن (π) مستويا يحتوي على المستقيم (Δ) وليكن $(\bar{\pi})$ محوّل (π) بالدوران $د(\overleftarrow{\Delta}, \frac{\theta}{2})$

حسب النظرية السابقة فإن الدوران $د(\overleftarrow{\Delta}, \theta)$ يساوي التحويل المركب $ت_{\bar{\pi}} \circ ت_{\pi}$.

نظرية :

كل دوران حول محور $\overleftarrow{\Delta}$ هو مركب تناظرين عموديين بالنسبة إلى مستويين متقاطعين وفق المستقيم (Δ).

4 – أسئلة التصحيح الذاتي :

4 – 1 – عيّن التحويل المركب :

$ل = د(\overleftarrow{\Delta}_2, 2\theta_2) \circ د(\overleftarrow{\Delta}_1, 2\theta_1)$

لدورانين محوراهما متقاطعان في نقطة م .

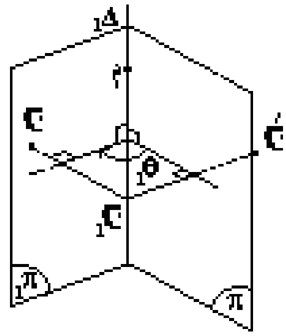
4 – 2 – الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(م, \overrightarrow{و}, \overrightarrow{ي}, \overrightarrow{ك})$. نعتبر المستوي (π) الذي معادلته : $2س - ع + 3ص - 1 = 0$.

ليكن $ت_{\pi}$ التناظر العمودي بالنسبة إلى المستوي (π) الذي يرفق بكل نقطة ن $(س, ع, ص)$ النقطة نَ $(سَ, عَ, صَ)$.

عيّن العبارة التحليلية للتناظر $ت_{\pi}$.

5 – الأجوبـة :

5 – 1 – حل التمرين 4 – 1 :



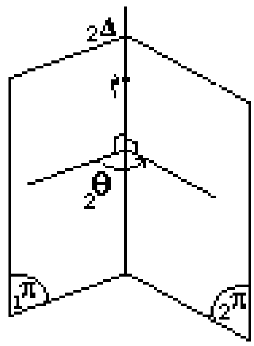
ليكن (π) المستوي المعيّن بالمستقيمين (Δ_1) ، (Δ_2) .

ليكن (π_1) المستوي المحوّل للمستوي (π) بالدوران :

د $(\overleftarrow{\Delta}_1$ ، $-\theta_1)$.

لدينا :

د $(\overleftarrow{\Delta}_1$ ، $2\theta_1)$ = ت$_{\pi}$ o ت$_{\pi_1}$.



ليكن (π_2) المستوي المحوّل للمستوي (π) بالدوران :

د $(\overleftarrow{\Delta}_2$ ، $\theta_2)$.

لدينا :

د $(\overleftarrow{\Delta}_2$ ، $2\theta_2)$ = ت$_{\pi_2}$ o ت$_{\pi}$.

نستنتج أن : ل = د $(\overleftarrow{\Delta}_2$ ، $2\theta_2)$ o د $(\overleftarrow{\Delta}_1$ ، $2\theta_1)$ ل = ت$_{\pi_2}$ o ت$_{\pi}$ o ت$_{\pi}$ o ت$_{\pi_1}$.

وبما أن ت$_{\pi}$ تضامن فإن :

ت$_{\pi}$ o ت$_{\pi}$ = 1ف (حيث 1ف هو التحويل الحيادي للفضاء)

وبالتالي : ل = د $(\overleftarrow{\Delta}_2$ ، $2\theta_2)$ o د $(\overleftarrow{\Delta}_1$ ، $2\theta_1)$ = ت$_{\pi_2}$ o ت$_{\pi_1}$.

ليكن (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (π_1) ، (π_2) .

م $\in (\Delta)$ لأن : م $\in (\pi_1) \cap (\pi_2)$.

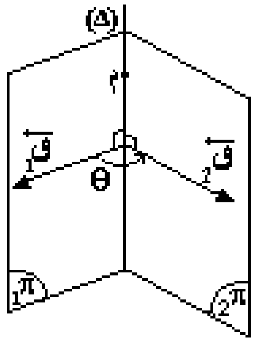
ليكن $\overleftarrow{ق_1}$ شعاعا يعامد (Δ) ويوازي (π_1) و ليكن $\overleftarrow{ق_2}$ شعاعا يعامد (Δ) ويوازي (π_2).

لنضع : ($\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$) = θ .

إذن : ل = $ت_{\pi_2}$ o $ت_{\pi_1}$.

ل = د ($\overleftarrow{\Delta}$ ، 2θ)

التحويل المركب ل هو دوران حول محور يشمل النقطة م .

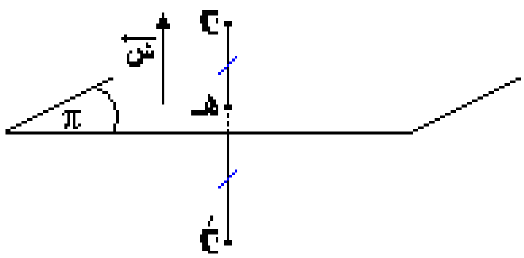


5 - 2 - حل التمرين 4 - 2 :

معادلة المستوي (π) هي : 2 س − ع + 3 ص − 1 = 0

الشعاع $\overleftarrow{ش}$ (2 ، −1 ، 3) يعامد المستوي (π) .

ليكن هـ منتصف القطعة [ن نَ]



تكون النقطة نَ صورة النقطة ن بالتناظر $ت_\pi$ إذا وفقط إذا كان لدينا : هـ ∈ (π) و $\overleftarrow{ن نَ}$ // $\overleftarrow{ش}$

إحداثيات هـ هي : $\left(\frac{\text{س}+\text{سَ}}{2} ، \frac{\text{ع}+\text{عَ}}{2} ، \frac{\text{ص}+\text{صَ}}{2}\right)$.

النقطة هـ تنتمي إلى المستوي (π)، إذا وفقط إذا كان لدينا :

$$2\left(\frac{\text{س}+\text{سَ}}{2}\right)-\left(\frac{\text{ع}+\text{عَ}}{2}\right)+3\left(\frac{\text{ص}+\text{صَ}}{2}\right)-1=0$$

أي : 2 س − ع + 3 ص + 2 سَ − عَ + 3 صَ − 2 = 0

2 سَ − عَ + 3 صَ = − (2 س − ع + 3 ص) + 2.

مركبات الشعاع $\overleftarrow{ن نَ}$ هي (سَ − س ، عَ − ع ، صَ − ص).

$\overleftarrow{ن نَ}$ يوازي $\overleftarrow{ش}$ إذا وفقط إذا كان لدينا : $\frac{\text{سَ}-\text{س}}{2}=\frac{\text{عَ}-\text{ع}}{-1}=\frac{\text{صَ}-\text{ص}}{3}$

يمكن أن نكتب

$$\frac{\text{سَ}-\text{س}}{2}=\frac{\text{عَ}-\text{ع}}{-1}=\frac{\text{صَ}-\text{ص}}{3}=\frac{2(\text{سَ}-\text{س})-(\text{عَ}-\text{ع})+3(\text{صَ}-\text{ص})}{4+1+9}$$

أي :

$$\frac{\text{سَ}-\text{س}}{2}=\frac{\text{عَ}-\text{ع}}{-1}=\frac{\text{صَ}-\text{ص}}{3}=\frac{(2\text{سَ}-\text{عَ}+3\text{صَ})-(2\text{س}-\text{ع}+3\text{ص})}{14}$$

$$=\frac{\left[-(2\text{س}-\text{ع}+3\text{ص})+2\right]-(2\text{س}-\text{ع}+3\text{ص})}{14}$$

$$=\frac{-(2\text{س}-\text{ع}+3\text{ص})+1}{7}$$

نستنتج أن :

$$\frac{\text{سَ}-\text{س}}{2}=\frac{(-2\text{س}-\text{ع}+3\text{ص})+1}{7}$$

$$\frac{\text{عَ}-\text{ع}}{-1}=\frac{-(2\text{س}-\text{ع}+3\text{ص})+1}{7}$$

$$\frac{\text{صَ}-\text{ص}}{3}=\frac{-(2\text{س}-\text{ع}+3\text{ص})+1}{7}$$

ومنه :

$$\begin{cases}\text{سَ}=\frac{1}{7}(3\text{س}+2\text{ع}-6\text{ص}+2)\\ \text{عَ}=\frac{1}{7}(2\text{س}+6\text{ع}+3\text{ص}-1)\\ \text{ص}=\frac{1}{7}(-6\text{س}+3\text{ع}-2\text{ص}+3)\end{cases}$$

فهرس السلسلة 5

تتضمن هذه السلسلة درسين هي :

- الدوال الأصلية

- الدوال اللوغارتمية والدوال الأسية

الـدوال الأصـلـيـة

الـهـدف من الـدرس : الـتـمـهـيد لـدراسـة الـدالـة الـلـوغـارتـمـيـة وحـسـاب الـمـسـاحـات.

الـمـدة الـلازمـة لـدارستـه : 10 ســـاعـات.

الدروس الـتي يـنـبـغي مـراجـعـتـهـا :

* الإسـتـمـرار
* الإشـتـقـاق.
* دراسـة الـدوال الـعـدديـة

الـمـراجـع : كـتـاب الـريـاضـيـات 3 ث / ع +1.

الـمـعـهـد الـتـربـوي الـوطـنـي.

تـصـمـيـم الـدرس

1 - الـتـفـاضـل.

2 - الـدالـة الأصـلـيـة.

3 - الـدوال الأصـلـيـة الـشـائـعـة.

4 - الـتـكـامـل غـيـر الـمـحـدود.

5 - الـتـكـامـل بـتـغـيـر الـمـتـحـول.

6 - الـتـكـامـل بـالـتـجـزئـة.

7 - الـتـكـامـل الـمـحـدود.

8 - تـطـبـيـقـات عـلـى حـسـاب الـمـسـاحـات.

9 - تـمـاريـن الـتـصـحـيـح الـذاتـي.

10 - الأجـوبـة.

1 - التفاضل

1 - 1 - تعريف :

لتكن تا دالة قابلة للإشتقاق عند $س_0$. نسمي تفاضل تا عند $س_0$ الدالة الخطية من ج نحو ج المعرفة كما يلي : هـ ↤ تاَ$(س_0)$.هـ، حيث تاَ$(س_0)$ العدد المشتق للدالة تا عند $س_0$.

1 - 2 - مثال :

لتكن تا : ج←ج ، س ↤ تا (س) = $س^2 - س + 2$ وَ $س_0 = 3$.

لدينا تاَ(س) = 2 س − 1 ومنه تاَ(3) = + 5. إذن تفاضل الدالة تا عند $س_0 = 3$ هي الدالة الخطية المعرفة كما يلي : هـ ↤ 5 هـ.

ملاحظة : إذا كانت الدالة تا قابلة للإشتقاق على مجال ف فإنه يوجد تفاضل للدالة تا من أجل كل س من المجال ف بحيث : هـ↤ تاَ(س) . هـ

1 - 3 - مثال :

تا : ج←ج ، س ↤ تا (س) = $س^3 - 2س^2 + 5$ ، الدالة تا كثير حدود. إذن الدالة تا قابلة للآشتقاق على ج ومنه

∀ س ∋ ج ، تفاضل الدالة تا عند س هي الدالة المعرفة كالآتي : هـ↤ تاَ(س) . هـ أي هـ ↤ $(3س^2 - 4س)$ه.

الصيغة الرمزية :

إذا كان س ↤ ع = تا (س) فإننا نرمز للدالة التفاضل للدالة تا بالرمز تفا تا ونكتب : هـ↤ تفا ع = تفا تا(س) أي هـ↤ تفا ع = تاَ(س) . هـ

ملاحظة : بالنسبة للدالة الحيادية لدينا س ↤ تا(س) = س ومنه تفا تا = تفا س. نجد : تفا تا (س) = تاَ (س) . هـ أي تفا تا(س) = 1 . هـ إذن تفا س = هـ. نستنتج ما يلي : تفا ع = تاَ (س) . تفا س.

تفا ع = تفا تا (س) = تاَ(س) . تفا س

1 – 4 – مثـال :

إذا كـان تـا (س) = جب س فـإن تفـا تـا (س) = تـجـب س تفـا س

1 – 5 – خـواص الـتـفـاضـل :

خـواص الـتـفـاضـل تُسـتـنـتـج مـن خـواص الـمـشـتـقـات. فـإذا كانـت تـا وَ هـا دالـتـين قـابـلـتـين لـلآشـتـقـاق على مجـال ل فإن :

1 – $\forall \lambda \in$ ح* : تفـا (λ تـا) = λ.تـفـا. تـا.

2 – تـفـا(تـا + هـا) = تـفـا تـا + تـفـا هـا.

3 – تـفـا(تـا.هـا) = هـا . تـفـا تـا + تـا . تـفـاهـا

4 – تـفـا$\left(\frac{\text{تا}}{\text{ها}}\right) = \frac{\text{ها. تفا تا} - \text{تا. تفاها}}{\text{ها}^2}$ / هـا(س) $\neq 0$ من أجل كـل س مـن الـمـجـال ل.

2 – الـدالـة الأصـلـيـة :

2 – 1 – مـفـهـوم الـدالـة الأصـلـيـة :

لـتكـن تـا وَ هـا دالـتيـن عـدديـتين مـعـرفـتين كـمـا يلي :

$$\text{ها} : \text{ح} \to \text{ح} ، \text{س} \mapsto \text{ها (س)} = \text{س}^2 + 3\text{س} + 1$$

$$\text{تا} : \text{ح} \to \text{ح} ، \text{س} \mapsto \text{تا (س)} = 2\text{س} + 3.$$

نـلاحـظ أن هـا دالـة كـثـير الـحـدود فـهـي قـابـلـة لـلآشـتـقـاق عـلـى ح حـيث دالـتـهـا الـمـشـتـقـة هـي : هـاَ = تـا أي :

$\forall$س $\in$ ح : هـاَ (س) = تـا (س)

نـقـول فـي هـذه الـحـالـة إن هـا دالـة أصـلـيـة لـلـدالـة تـا علـى ح.

2 – 2 – تـعـريـف :

> إذا كـانـت تـا دالـة مـعـرفـة ومـسـتـمـرة عـلـى مـجـال ف فـإنـه تـوجـد دالـة هـا مـعـرفـة وقـابـلـة لـلآشـتـقـاق عـلـى ف بـحـيـث :$\forall$ س $\in$ ف ، هـاَ(س) = تـا(س). نـسـمـي هـا دالـة أصـلـيـة لـلـدالـة تـا عـلـى الـمـجـال ف.

2 – 3 – أمـثـلـة : لـتـكـن تا وَ ها دالـتـين مـعـرفـتـين كـالآتـي :

$$\text{ها} : \text{ح} \to \text{ح} ، \text{س} \mapsto \text{ها (س)} = \text{س}^3 - 2\text{س}^2 + \text{س} - 3$$

تـا : ح ←ح ، س ↦ تـا (س) = 3س^2–4س+1

لدينـا تـا دالـة كـثـيـر الـحـدود مـسـتـمـرة على ح وَ هـا دالـة كـثير الحدود قـابلة لـلاشـتـقاق على ح

حيث هـاَ(س) = 3س^2–4س+1

أي :∀ س ∍ ح : هـاَ(س) = تـا(س) إذن هـا دالة أصلـيـة لـلدالـة تا على ح.

* نـعـتـبـر الـدالـتـين هـا وَ تـا حيث :

هـا : ح ←ح ، س ↦ هـا (س) = $\frac{1}{2}$جب2س

تـا : ح ←ح ، س ↦ تـا (س) = تجب 2 س

لدينـا تـا الـدالـة " جـيـب الـتـمـام " مـسـتـمـرة عـلـى ح، وَ هـا " الدالة الجيـب " قـابلـة للإشـتقاق على ح

حيث هـاَ (س) = تجب 2 س وبالتالي :

∀س ∍ ح : هـاَ(س) = تـا(س) إذن هـا دالـة أصـلـيـة لـلـدالـة تا عـلـى ح

2 – 4 – نـظـريـة :

إذا كـانـت هـا دالـة أصـلـيـة لـلـدالـة تـا عـلـى مـجـال ف فـإن الـدالـة تـا تـقـبـل مـجـمـوعـة غـيـر مـنـتـهـيـة مـن الـدوال الأصـلـيـة كـلـهـا مـن الـشـكـل هـا + جـ حـيـث جـ عـدد حـقـيـقـي ثـابـت ولا تـقـبـل دوال أصـلـيـة أخـرى

الـبـرهـان :

بـمـا أن الـدالـة هـا أصـلـيـة لـلـدالـة تـا عـلـى الـمـجـال ف فـإن هـاَ = تـا وَ (هـا + حـ)َ = هـاَ لأن مـشـتـق الـدالـة الـثـابـتـة هـي الـدالـة الـمـعـدومـة. ومـنـه (هـا + جـ)َ = تـا أي : هـا + جـ هـي دالـة أصـلـيـة لـلـدالـة تـا عـلـى ف.

2 – 4 – 1 – مـثـال : لـتـكـن تـا وَ هـا وَ عـا ثلاثـة دوال عـدديـة مـعـرفـة كـمـا يـلـي :

هـا : ح ←ح ، س ↦ هـا (س) = س^2+4س+5

تـا : ح ←ح ، س ↦ تـا (س) = 2 س + 4

عـا : ح ←ح ، س ↦ عـا (س) = س^2+4س+5+جـ حيث جـ ∍ح

نـلاحـظ أن هـا دالـة أصـلـيـة لـلـدالـة تـا لأن هـاَ (س) = 2 س + 4 أي هـاَ = تـا وكـذلـك عـا(س) = هـا (س) + جـ فنجد عاَ (س) = هاَ (س) لأن (جـ)َ = 0

إذن عـا هـي دالـة أصـلـيـة لـلـدالـة تـا أيـضـاً وهـذا مـن أجـل كـل عـدد حـقـيـقـي جـ.

2 – 5 – نتيجة :

إذا كانت تا معرفة ومستمرة على مجال ف فإنه توجد دالة أصلية وحيدة للدالة تا تنعدم من أجل القيمة $س_0$ لمتغير س حيث $(س_0 \in ف)$.

البرهان :

لتكن ها دالة أصلية للدالة تا. الدوال الأصلية للدالة تا هي من الشكل :φ = ها + جـ

أي : ∀ س ∈ ف φ (س) = ها (س) + جـ.

لدينا : $\varphi(س_0) = ها(س_0) + جـ = 0$ أي $جـ = -ها(س_0)$ إذن جـ وحيد ومنه

$\varphi(س) = ها(س) - ها(س_0)$ فالدالة φ وحيدة.

*** خلاصة :**

الدالة الأصلية للدالة تا على المجال ف والتي تنعدم عند $س_0$ هي φ حيث :

$\varphi(س) = ها(س) - ها(س_0)$ من أجل كل س من ف.

2 – 5 – 1 – مثال :

عين φ الدالة الأصلية للدالة تا بحيث تا (س) = تجب س والتي تنعدم عند $\frac{\pi}{3}$.

الحل :

نبحث أولاً عن دالة أصلية للدالة تا ونعلم أن (جب س)َ = تجب س إذن لتكن الدالة ها حيث ها (س) = جب س دالة أصلية للدالة تا.

ومنه كل دالة أصلية للدالة تا التي تنعدم من أجل $س_0 = \frac{\pi}{3}$ هي الدالة φ حيث

$$\varphi(س) = ها(س) - ها\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

أي $\varphi(س) = جب س - جب \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + جب س$. (لأن $جب \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

2 – 6 – تعميم :

توجد دالة أصلية وحيدة للدالة تا تأخذ قيمة معينة λ من أجل $س_0$ وهي φ حيث

$$\varphi(س_0) = ها(س) - ها(س_0) + \lambda$$

2 – 6 – 1 – تطبيق :

عين الدالة الأصلية للدالة تا حيث تا (س) = 2 س +1. والتي تأخذ القيمة – 2 من أجل $س_0=0$.

الحل : نبحث أولا عن دالة أصلية للدالة تا وهي : $ها(س)=س^2+س$ ومنه

$φ(س)=ها(س)-ها(0)-2=س^2+س-2$ (لأن ها (0) = 0)

3 – الدوال الأصلية الشائعة :

لتكن تا دالة معرّفة ومستمرة على مجال ف وَ ها دالتها الأصلية على هذا المجال أي : هاَ (س) = تا (س) من أجل كل س من ف.

إليك الجدول الأتي الذي يوضح الدوال الأصلية لبعض الدوال الشائعة.

تا(س)	ها(س)
$ا$ ($ا \neq 0$)	ا س + جـ ، جـ∈ح
س	$\frac{س^2}{2}+جـ$ ، جـ∈ح
$\frac{1}{\sqrt{س}}$ س > 0	$2\sqrt{س}+جـ$ ، جـ∈ح
$\sqrt{س}$ س ≥ 0	$\frac{2}{3}\sqrt{س^3}+جـ$ ، جـ∈ح
$\sqrt[3]{س}$	$\frac{3}{4}س.\sqrt[3]{س}+جـ$ ، جـ∈ح
$س^ن$ ، (ن ∈ ص – {-1})	$\frac{س^{ن+1}}{ن+1}+جـ$ ، جـ∈ح
جب س	–تجب س
تجب س	جب س
جب (ا س + ب) ، ($ا \neq 0$)	$-\frac{1}{ا}$ جب (ا س + ب)+جـ ، جـ∈ح
تجب (ا س + ب) ، ($ا \neq 0$)	

$\frac{1}{\text{تجب}^2 س}$ / س $\neq \frac{\pi}{2} +$ ك π وَ ك ∍ ص	$\frac{1}{أ}$ جب (أ س + ب) ، جـ∍ح
$\frac{1}{\text{جب}^2 س}$ / س $\neq$ ك π وَ ك ∍ ص	ظل س + جـ ، جـ∍ح
	تظل س + جـ ، جـ∍ح
تا^ن . تاَ ، (ن ∍ ≤ - {-1}	$\frac{\text{تا}^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ ، جـ∍ح

4 – التكامل غير المحدود :

4 – 1 – تمرين محلول :

لتكن مـج مجموعـة الـدول العدديـة القابلـة للإشتقاق علـى مجال ف وَع علاقة ثنائية معرفة في المجموعة مج كما يلي :

∀ (عا ، ها) ∍ مج^2:عاع ها ⇔ { عا و هالهما نفسمجموعة التعريف وَ عاَ = هاَ }

*بين أن ع علاقة تكافؤ.

▯ تـا دالـة مـن مـج معرفة علـى ف حيث هاَ = تا. عين هاْ صنف تكافؤ الدالة ها علماً بأن ها تنتمي إلى مج.

الحل :

* خاصية الإنعكاس : ∀ تا∍ مج تا وَ تا لهما نفس مجموعة التعريف وَ تاَ = تاَ ومنه (تاع تا)

فالعلاقةع إنعكاسية.

* خاصية التناظر : (∀ تا∍ مج) ، (∀ ها∍ مج)

(تاع ها) ⇐(ف$_{تا}$ = ف$_{ها}$ وَ تاَ = هاَ)

$$\text{(ها ع تا)} \Leftarrow \left. \begin{array}{c} ف_{تا} = ف_{ها} \\ \text{وَ} \\ \text{هاَ = تاَ} \end{array} \right\} \Leftarrow$$

فالعلاقة ع تناظرية

*خاصية التعدي : ($\forall$ تا $\in$ مج) ، ($\forall$ ها $\in$ مج) ($\forall$ φ $\in$ مج).

$$\left. \begin{array}{c} \text{تا ع ها} \\ \text{وَ} \\ \text{تا ع } \varphi \end{array} \right\} \Leftarrow \left. \begin{array}{c} ف_{تا} = ف_{ها} \text{ وَ } تاَ = هاَ \\ \text{وَ} \\ ف_{ها} = ف_{\varphi} \text{ وَ } هاَ = \varphi' \end{array} \right\} \Leftarrow ف_{تا} = ف_{\varphi} \text{ وَ } تاَ = \varphi'$$

أي أن تا ع φ فالعلاقة ع متعدية.

* النتيجة : ع علاقة تكافؤ.

* صنف التكافؤ : بما أم ع علاقة تكافؤ إذن توجد أصناف التكافؤ.

ومنه : ها = {عا $\in$ مج / عاَ = هاَ وَ ها وَ عا لهما نفس مجموعة التعريف}

أي ها = {عا $\in$ مج / عاَ = تاَ } لأن (هاَ = تا).

أو هاَ = {عا $\in$ مج / عا (س) = (ها (س) +جـ وَ جـ $\in$ ح}

نرمز لصنف التكافؤ $\dot{ها}$ بالرمز التالي :ʃ تا(س) تفا س.

نسمي صنف التكافؤ هذا " التكامل غير محدود للدالة تا " ونقرأ " تكامل تا (س) تفا س "

وإذا كانت ها دالة أصلية للدالة تا فيمكن أن نكتب : ʃ تا(س) تفا س = ها (س) + جـ ، حيث جـ $\in$ ح.

4 – 2 – مثال :

* تا (س) = س^2 يكون ʃ س^2 تفا س = $\frac{1}{3}$س^3+جـ

* تا (س) = س يكون ʃ س تفا س = $\frac{1}{2}$س^2+جـ

 تا (س) = 1 يكون ʃ تفا س = س + جـ

4 – 3 – خواص التكامل غير المحدود :

* ∫ (تا(س) + ها(س)) تفا س = ∫ تا(س) تفا س + ∫ ها(س) تفا س

* ∫ λ تا(س) تفا س = λ . ∫ تا(س) تفا س . λ ∈ ح*

ملاحظة :

□ ∫ (تا(س) × ها(س)) تفا س ≠ ∫ تا(س) تفا س × ∫ ها(س) تفا س

4 – 3 – 1 – أمثلة :

$$\int \left(\text{س}^2+3\text{س}-5\right) \text{ تفا س} = \int \text{س}^2 \text{ تفا س} + \int 3\text{س} \text{ تفا س} + \int -5 \text{ تفا س}$$

$$= \frac{1}{3}\text{س}^3 + \frac{3}{2}\text{س}^2 - 5\text{س} + \text{جـ}$$ ، حيث جـ ∈ ح.

$$\int \frac{7}{2}\sqrt{\text{س}} \text{ تفا س} = \frac{7}{2}\int \sqrt{\text{س}} \text{ تفا س}$$

$$= \frac{7}{2}.\frac{2}{3}\text{س}\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$$ ، جـ ∈ ح

$$= \frac{7}{2}\text{س}\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$$ ، جـ ∈ ح

5 – التكامل بتغير المتحول :

5 – 1 – نظرية :

إذا كانت ها دالة أصلية للدالة تا على المجال ف فإن : ∫ تا [عا(س)] عاَ(س) تفا س = ها [عا(س)] + جـ ، (جـ ∈ ح)

□ **البرهان :**

نضع ع = عا (س) فنجد : تفا ع = عاَ (س) تفا س ومنه : ∫ تا(ع) تفا ع = ها(ع) + جـ ، جـ ∈ ح (لأن ها دالة أصلية للدالة تا)

5 – 2 – مثال :

أحسب $\int \left(\text{س}^2+3\text{س}+2\right)^3 \left(2\text{س}+3\right)$ تفا س

الحل : نضع $\text{ع} = \text{س}^2+3\text{س}+2$ ومنه تفا ع = (2س + 3) تفا س

$$\int (س^2+3س+2)^3 (2س+3) \text{ تفا س} = \int ع^3 \text{ تفا ع} = \frac{ع^4}{4} + جـ$$

$$= \frac{(س^2+3س+2)^4}{4} + جـ \text{ ، } جـ \in ح$$

5 – 3 – مثال :

أحسب $\int جب\left(2س+\frac{\pi}{3}\right)$ تفا س

الحل : بوضع $ع = 2س + \frac{\pi}{3}$ نجد : تفاع = 2 تفا س أي $\frac{\text{تفاع}}{2} =$ تفاس

إذن : $\int جب\left(2س+\frac{\pi}{3}\right) \text{ تفاس} = \int جب ع \frac{\text{تفاع}}{2} = \frac{1}{2}\int جب ع \text{ تفاع}$

$$= \frac{1}{2}(- \text{ تجب ع}) + جـ \text{ ، } جـ \in ح$$

$$= -\frac{1}{2} \text{ تجب} \left(2س+\frac{\pi}{3}\right) + جـ \text{ ، } جـ \in ح$$

6 – التكامل بالتجزئة :

لتكن ع وَ ص دالتين للمتغير الحقيقي س قابلتين للإشتقاق على مجال ف فإن : (ع.ص)َ = عَ ص + صَ ع. ومنه تفا (ع.ص) = ع. تفا ص + ص . تفا ع

نجد : ع تفا ص = تفا (ع.ص) – ص تفا ع.

ومنه : $\int$ ع تفا ص = $\int$ تفا (ع ص) – $\int$ ص تفا ع.

نستنتج أن :

$$\boxed{\int \text{ع تفا ص} = \text{ع ص} - \int \text{ص تفا ع.}}$$

ملاحظة : نستخدم طريقة المكاملة بالتجزئة عند مكاملة جداء دالتين غير متجانستين مثلاً : $\int$ س^{ن} جب α س تفا س وَ $\int$ س^{ن} جب α س تفا س. وهناك حالات عديدة سنراها فيما بعد.

6 – 1 – تطبيقات : أحسب ما يلي :

$$\int \text{س}\ \text{تجب}\ 2\text{س}\ \text{تفا}\ \text{س}$$

$$\int \frac{\text{س}}{(\text{س}-2)^3}\ \text{تفا}\ \text{س}$$

الحل : 1) حساب : $\int \text{س}\ \text{تجب}\ 2\text{س}\ \text{تفا}\ \text{س}$

نضع: $\begin{cases} \text{ع} = \text{س} \\ \text{و} \\ \text{تفاص} = \text{تجب}2\text{س}.\ \text{تفاس} \end{cases}$ فنجد : $\begin{cases} \text{تفاع} = \text{تفاس} \\ \text{و} \\ \text{ص} = \frac{1}{2}\text{جب}2\text{س} \end{cases}$

ومنه :

$$\int \text{س}\ \text{تجب}\ 2\text{س}\ \text{تفا}\ \text{س} = \frac{\text{س}}{2}\text{جب}2\text{س} - \int \frac{1}{2}\text{س}\text{جب}\ 2\text{س}\ \text{تفا}\ \text{س}$$

$$= \frac{\text{س}}{2}\text{جب}2\text{س} - \frac{1}{2}\int \text{س}\text{جب}\ 2\text{س}\ \text{تفا}\ \text{س}$$

$$= \frac{\text{س}}{2}\text{جب}2\text{س} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\text{تجب}\ 2\text{س}\right) + \text{جـ} ، \text{جـ} \in \text{ح}$$

$$= \frac{\text{س}}{2}\text{جب}2\text{س} + \frac{1}{4}\text{تجب}\ 2\text{س} + \text{جـ} ، \text{جـ} \in \text{ح}$$

2) حساب $\int \frac{\text{س}}{(\text{س}-2)^3}\ \text{تفا}\ \text{س}$

نستطيع كتابة : $\int \frac{\text{س}}{(\text{س}-2)^3}\ \text{تفا}\ \text{س} = \int (\text{س}-2)^{-3}\ \text{س}\ \text{تفا}\ \text{س}$

نضع: $\begin{cases} ع = س \\ و \\ تفاص = (س-2)^{-3} .\ تفاس \end{cases}$ فنجد : $\begin{cases} تفاع = تفاس \\ و \\ ص = -\dfrac{1}{2(س-2)^2} \end{cases}$

(لأن : ∫ تفاص = $\int (س-2)^{-3}$ تفاس $\Leftrightarrow$ ص = $\int (س-2)^{-3}.1$ تفاس هي من الشكل ∫ تا^ن(س) تاَ(س) تفاس) (أنظر الجدول)

ومنه: $\int \dfrac{س}{(س-2)^3}$ تفاس $= -\dfrac{س}{2(س-2)^2} + \int \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{(س-2)^2}$ تفاس

$= -\dfrac{س}{2(س-2)^2} + \dfrac{1}{2} \int \dfrac{1}{(س-2)^2}$ تفاس

حساب $\int \dfrac{1}{(س-2)^2}$ تفاس هو نفسه حساب $\int (س-2)^{-2}$ تفاس

وهو من الشكل ∫ تا^ن(س) تاَ(س) تفاس.

إذن $\int \dfrac{1}{(س-2)^2}$ تفاس $= -\dfrac{1}{س-2} +$ جـ

ومنه $\int \dfrac{س}{(س-2)^3}$ تفاس $= -\dfrac{س}{2(س-2)^2} - \dfrac{1}{2(س-2)} +$ جـ ، جـ ∈ ح

7 – التكامل المحدود :

7 – 1 – تعريف :

إذا كان تا دالة مستمرة على مجال [أ ، ب] وليكن $س_0$ ، $س_1$ عددين من هذا المجال وكانت ها دالة أصلية للدالة تا على المجال [أ ، ب] فإن العدد ها ($س_1$) – ها ($س_0$) نسميه التكامل المحدود للدالة تا من $س_0$ إلى $س_1$ ونرمز له بالرمز : $\int_{س_0}^{س_1}$ تا(س) تفاس .

ونقرأ " التكامل من $س_0$ إلى $س_1$ لِـ تا(س) تفاس " .

و نكتب : $\int_{س_0}^{س_1}$ تا(س) تفاس = ها $(س_1)$ − ها $(س_0)$

أو $\int_{س_0}^{س_1}$ تا(س) تفاس = $[\text{ها(س)}]_{س_0}^{س_1}$.

يُسمى كل من $س_0$ وَ $س_1$ على الترتيب الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل.

7 − 2 − أمثلة :

- أحسب : $\int_1^2$ (س + 3) تفاس .

$$\int_1^2 (\text{س} + 3)\ \text{تفاس} = \left[\frac{\text{س}^2}{2} + 3\text{س} + \text{جـ}\right]_1^2 .$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 3.2 + \text{جـ}\right) - \left(\frac{1}{2} + 3 + \text{جـ}\right)$$

$$= 2 + 6 + \text{جـ} - \frac{1}{2} - 3 - \text{جـ} = \frac{9}{2} .$$

- أحسب : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جب س تفاس .

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب س تفاس} = [-\text{ تجب س} + \text{جـ}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\text{تجب} \frac{\pi}{2} + \text{جـ}\right) - \left(-\text{تجب} \frac{\pi}{4} + \text{جـ}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

7 − 3 − خواص التكامل المحدود :

- التكامل المحدود لدالة عددية هو عدد حقيقي ثابت لا يتعلق بالدالة الأصلية المختارة.
- $\int_{س_0}^{س_1}$ تا(س) = − $\int_{س_1}^{س_0}$ تا(س) تفاس.
- $\int_{س_1}^{س_0}$ تا(س) تفاس = 0 .
- $\int_{س_0}^{س_1}$ تا(س) تفاس = $\int_{س_0}^{س_2}$ تا(س) تفاس + $\int_{س_2}^{س_1}$ تا(س) تفاس .

حيث : $س_0 \langle س_2 \langle س_1$. (دستور شال).

7 − 3 − 1 − مثال : أحسب $\int_0^5$ س $|\text{س} - 3|$ تفاس .

نـلاحظ أن : $|س - 3| = \begin{cases} س - 3 & \text{إذا كـان : } س \geq 3 \\ -(س - 3) & \text{إذا كـان : } س \leq 3 \end{cases}$

ومنـه $\int_0^5 س|س-3|$ تـفـاس = $\int_0^3 س|س-3|$ تـفـاس + $\int_3^5 س|س-3|$ تفاس.

= $\int_0^3 -س(س-3)$ تـفـاس + $\int_3^5 س(س-3)$ تـفـاس.

= $\int_3^5 (س^2-3س)$ تـفـاس − $\int_0^3 (س^2-3س)$ تـفـاس

$$= \left[\frac{س^3}{3}-\frac{3}{2}س^2\right]_3^5 - \left[\frac{س^3}{3}-\frac{3}{2}س^2\right]_0^3$$

$$\int_0^5 س|س-3| \text{ تفاس} = \left[\left(\frac{5^3}{3}-\frac{3}{2}.5^2\right)-\left(\frac{3^3}{3}-\frac{3}{2}.3^2\right)\right]-\left[\left(\frac{3^3}{3}-\frac{3}{2}.3^2\right)-(0)\right]$$

$$0-\frac{27}{2}+9-\frac{27}{2}+9-\frac{75}{2}-\frac{125}{3}=$$

$$\frac{79}{6}=\frac{108-63-250}{6}=18-\frac{75-54}{2}+\frac{125}{3}=$$

8 – تطبيقات على حسابات المساحات :

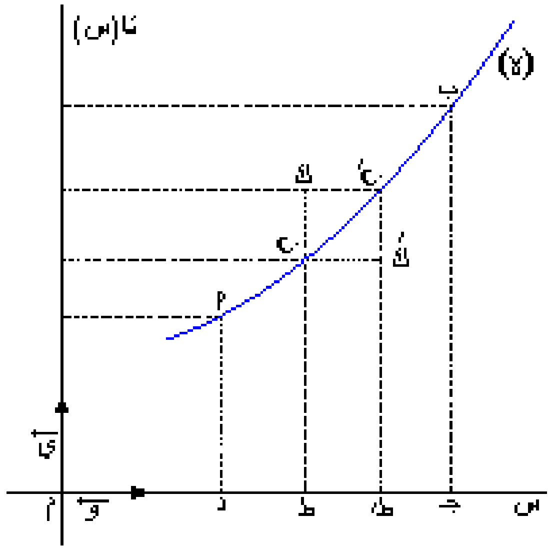
في كـل مـا يـأتـي تـا دالـة عدديـة معرفـة ومسـتمرة على المجال $[س_0 ، س_1]$ و$(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$ مـعلم متعـامـد ومتجـانـس في المسـتـوي.

- **الحـالـة الأولـى** : إذا كانت الدالة تـا متزايدة على المجال $[س_0 ، س_1]$ وحيث أن : $\forall$ س $\in [س_0 ، س_1]$ ، تـا(س) ≥ 0 أي أن المـنـحـنــي (γ) المـمـثـل لـلدالـة تـا يـقـع فـوق مـحـور الـفـواصـل (أنـظـر الـشـكـل).

ولتكـن الـنـقـط د $(س_0 ، 0)$ ، ط (س ، 0) ،طَ (س + هـ،0) ، جـ $(س_1 ،0)$ والـنـقـط أ $(س_0 ،$ تا$(س_0))$ ، ن(س، تا(س)) ، نَ (س +هـ ، تـا(س+هـ)). ب $(س_1 ،$ تـا$(س_1))$.

ومـنـه نـلاحـظ أن :Δ = φ (س+هـ) − φ (س).

كذلك مساحة المستطيل ط طَ كَ ن هي هـ . تا(س) ومساحة المستطيل ط طَ نَ ك هي هـ . تا(س+هـ).



من المنحني (γ) كذلك النقطتين ك (س، تا(س+هـ)) ، كَ (س+هـ، تا(س)).

حيث هـ عدد حقيقي موجب غير معدوم ويكون س+هـ ∋ [س$_0$ ، س$_1$].

ولنرمز إلى مساحة الشكل د ط ن أ بالرمز φ (س) والشكل د طَ نَ أ بالرمز φ (س + هـ) ومساحة الشكل ط طَ ن نَ بالرمز Δ

نستنتج ما يلي :

هـ . تا(س) ≤ Δ ≤ هـ . تا(س+هـ)

أي هـ . تا(س) ≤ φ (س+هـ) − φ (س) ≤ هـ . تا(س+هـ) .

$$\text{ومنه تا(س)} \le \frac{\varphi(\text{س+هـ})-\varphi(\text{س})}{\text{هـ}} \le \text{تا(س+هـ)}$$

(بقسمة الأطراف الثلاثة على هـ).

$$\text{وبالتالي : } \lim_{\text{هـ}\to 0^+} \text{تا(س)} \le \lim_{\text{هـ}\to 0^+} \frac{\varphi(\text{س+هـ})-\varphi(\text{س})}{\text{هـ}} \le \lim_{\text{هـ}\to 0^+} \text{تا(س+هـ)}$$

$$\text{أي : تا(س)} \le \lim_{\text{هـ}\to 0^+} \frac{\varphi(\text{س+هـ})-\varphi(\text{س})}{\text{هـ}} \le \text{تا(س)}.$$

$$\text{ومنه : } \lim_{\text{هـ}\to 0^+} \frac{\varphi(\text{س+هـ})-\varphi(\text{س})}{\text{هـ}} = \text{تا(س)}.$$

- ليكن هـ عدد حقيقي سالب تماما، في هذه الحالة تكون مساحة الشكل طَ ط ن نَ هي φ (س) − φ (س+هـ) ونجدها محصورة كالآتي :

− هـ . تا(س+هـ) ≤ φ (س) −φ (س+هـ) ≤ − هـ تا(س) (لأن : − هـ> 0).

$$\text{ومنه : تا(س+هـ)} \le \frac{\varphi(\text{س+هـ})-\varphi(\text{س})}{\text{هـ}} \le \text{تا(س)}.$$

أو تـا(س+هـ) $\leq$ $\dfrac{\varphi(س+هـ)-\varphi(س)}{هـ}$ $\leq$ تـا(س) .

وبـالـتـالي : $\lim\limits_{هـ\to 0^-}$ تـا(س+هـ) $\leq$ $\lim\limits_{هـ\to 0^-} \dfrac{\varphi(س+هـ)-\varphi(س)}{هـ}$ $\leq$ $\lim\limits_{هـ\to 0^-}$ تـا(س)

أي : ـات(س) $\leq$ $\lim\limits_{هـ\to 0^-} \dfrac{\varphi(س+هـ)-\varphi(س)}{هـ}$ $\leq$ تـا(س).

ومـنـه : $\lim\limits_{هـ\to 0^-} \dfrac{\varphi(س+هـ)-\varphi(س)}{هـ}$ = تـا(س).

نـتـيـجـة 1 :

$\forall$ هـ $\ni$ ج، $\lim\limits_{هـ\to 0} \dfrac{\varphi(س+هـ)-\varphi(س)}{هـ}$ = تـا(س) مـن أجل كل س من$]$س$_0$ ، س$_1[$

ومـنـه φ' = تـا أي أن φ هـي دالـة أصـلـيـة لـلدالـة تـا .

نـتـيـجـة 2 :

φ هـي دالـة أصـلـيـة لـلـدالـة تـا تـنـعدم مـن أجـل س = س$_0$.

- **مـلاحـظـة :**

إذا كـانـت تـا دالـة متـنـاقـصـة عـلـى الـمـجـال [س$_0$ ، س$_1$]. بـنـفـس الـطـريـقـتـين الـسـابـقـتـين وبـتـغـيـير إتـجـاهـات الـمتـبـايـنـات الـسـابـقـة نـصـل إلـى نـفـس الـنـتـيـجـتـين الـسّـابـقـتـين.

مـ = $\int_1^2$ تـا(س) . تـفـاس = $\left[\dfrac{س^3}{2}\right]_1^2 = \left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{3}\right)$ سم^2 = $\dfrac{7}{3}$ سم^2 .

الـحـالـة الـثـالـثـة :

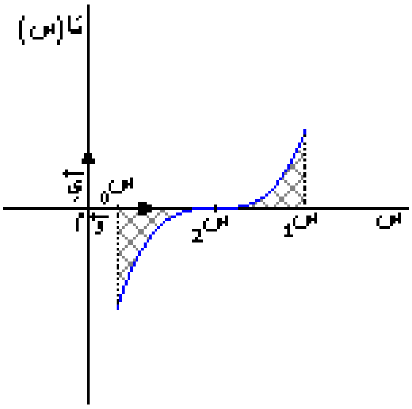
إذا كـان الـعـدد تـا(س) يـغـيـر الإشـارة بـيـن س$_0$ ، س$_1$ ولـيـكـن

س$_0$ > س$_2$ > س$_1$ بـحـيـث : $\begin{cases} \forall س \ni \left]س_0 ، س_2\right[، \ تـا(س) \geq 0 \\ \forall س \ni \left]س_2 ، س_1\right[، \ تـا(س) \leq 0 \end{cases}$

فـإن :

$$م = \int_{س_0}^{س_2} \text{تا(س)}\ .\text{تفاس} + \int_{س_2}^{س_1} -\text{تا(س) تفاس}$$

$$= \int_{س_0}^{س_2} \text{تا(س)}.\ \text{تفاس} - \int_{س_2}^{س_1} \text{تا(س) تفاس}$$



8 – 1 – 2 – مـثـال :

تـا دالـة عددية حيث تـا(س) = $س^3$.

أحسـب الـمسـاحـة مـ الـمحصـورة بين الـمنـحنـي (γ)

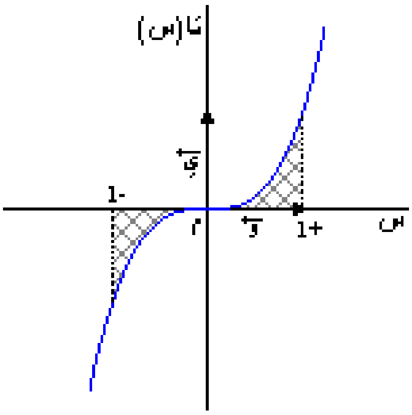
الـممـثل لـلـدالـة تـا ومحـور الـفـواصـل والـمسـتـقيمـين الـذيـن معـادلـتـهمـا س = −1 وَ س = 1 .

الـحـل :

نـلاحظ أن الـعـدد تا(س) يـغيـر الإشـارة بـيـن −1 وَ +1 حـيث :

∀ س ∍ [−1 ، 0] ، تا(س)≤ 0

∀ س ∍ [0 ، 1] ، تـا(س) ≥ 0



ومـنـه :

$$م = \int_{-1}^{0} - \text{تـا(س) تفاس} + \int_{0}^{1} \text{تا(س) تفاس}$$

8 – 1 – نـظـريـة :

لـتكـن تـا دالـة مسـتـمـرة ومـوجبـة على الـمجـال [$س_0$ ، $س_1$]

ولـتـكـن (Γ) مـجـمـوعـة الـنـقـط ن(س،ع) بـحـيـث :

Γ = {ن (س،ع) / $س_0$ ≤ س ≤ $س_1$ وَ 0 ≤ ع ≤ تـا(س)}.

فـإن الـمسـاحـة مـ ، مـجـمـوعـة نـقـطΓ هـي :

$$م (\Gamma) = \int_{س_0}^{س_1} \text{تـا(س) تفـا س أي م} = \varphi\ (س_1) - \varphi\ (س_0)\ .$$

حـيث φ دالـة أصـلـيـة لـلـدالـة تـا.

● الـحـالـة الـثـانـيـة :

نـفـرض أن : تـا(س) ≤ 0 مـهـمـا كـان س مـن الـمجـال [$س_0$ ، $س_1$]

ولـتـكـن (Γ) مـجـمـوعـة الـنـقـط ن(س،ع) بـحـيـث :

Γ = { ن (س،ع) / $س_0$ ≤ س ≤ $س_1$ وَ تـا(س) ≤ ع ≤ 0 }.

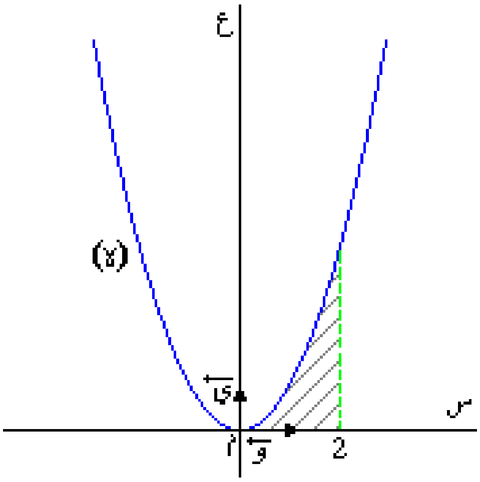
وَ Γ = {ن (س،ع) / $س_0$ ≤ س ≤ $س_1$ وَ 0 ≤ ع ≤ − تـا(س) }.

في هـذه الـحـالـة يـكـون الـمنـحنـي (γ) تـحـت مـحـور الـفـواصـل.

وبالتالي : مـ (Γ) = مـ (Γ) ومنه م (Γ) = $\int_{س_0}^{س_1}$ –تا(س) تفاس.

نجد : مـ (Γ) = – $\int_{س_0}^{س_1}$ تا(س) تفاس.

8 –1 – 1 – مثال :



تا دالة عددية حيث تا(س) = س^2.

أحسب مـ مساحة الحيز المحصور بين المنحني (γ) الممثل للدالة تا في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما س = 1 وَ س = 2 ($\|\vec{و}\|$ = 1 سم)

الحل :

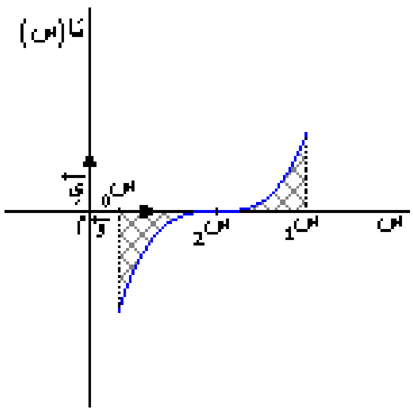
نلاحظ المنحني (γ) فوق محور الفواصل و منه :

$$مـ = \int_1^2 تا\ (س)\ تفاس = \left[\frac{س^3}{3}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) سم^2 = \frac{7}{3} سم^2$$

الحالة الثالثة :

إذا كان العدد تا (س) يغير الإشارة بين $س_0$ ، $س_1$ وليكن $س_0 \langle س_2 \langle س_1$ بحيث :

$$\begin{cases} \forall س \in \left]س_0 ، س_2\right[، تا(س) \geq 0 \\ \forall س \in \left]س_2 ، س_1\right[، تا(س) \leq 0 \end{cases}$$



فإن :

مـ = $\int_{س_0}^{س_2}$ تا(س) تفاس + $\int_{س_2}^{س_1}$ – تا(س) تفاس

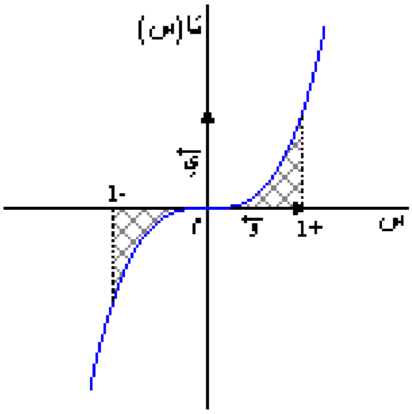
مـ = $\int_{س_0}^{س_2}$ تا (س) تفاس – $\int_{س_2}^{س_1}$ – تا(س) تفاس

8 – 1 – 2 – مثال :

تا دالة عددية حيث تا(س) = $س^{3}$

أحسب المساحة مـ المحصورة المنحنى (γ) الممثل للدالة تا ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما س = − 1 و س = 1

الحل : نلاحظ أن العدد تا(س) تغير الإشارة بين −1 و 1 حيث



∀ س ∋ [−1 ، 0] : تا (س)≤ 0

∀ س ∋ [0 ، 1] : تا (س)≥ 0

مـ = $\int_{-1}^{0}$ −تا(س) تفاس + $\int_{0}^{1}$ تا(س) تفاس

مـ = $\int_{-1}^{0}$ $س^{3}$ تفاس + $\int_{-1}^{0}$ $س^{3}$ تفاس

$$مـ = - \left[\frac{س^{4}}{4} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{س^{4}}{4} \right]_{0}^{1} = - \left(0 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - 0 \right)$$

$$مـ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ سم}^{2}$$

• **الحالة العامة :**

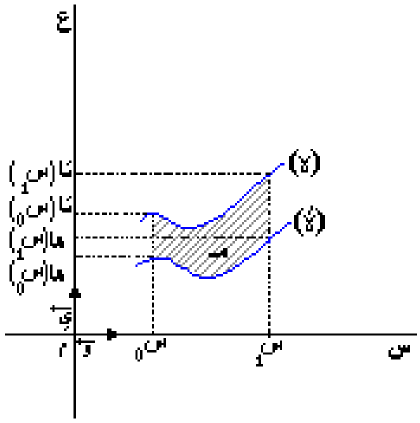
ليكن المنحني (γ) الممثل للدالة تا وَالمنحني(γ̄) الممثل للدالة ها في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$. نسمي $مـ_{1}$ المساحة المحصورة بين المنحني (γ) ومحور الفواصل والمستقيمين س = $س_{0}$ وَ س = $س_{1}$.

ونسمي $مـ_{2}$ المساحة المحصورة بين المنحني (γ̄) ومحور الفواصل والمستقيمين : س = $س_{0}$ وَ س = $س_{1}$ ولنحسب مـ المحصورة بين المنحنيين (γ) وَ (γ̄) لذلك نفرض ما يلي :

∀ س ∋ [$س_{0}$ ، $س_{1}$] ، ها(س) ≥ تا(س) ومنه المنحني (γ) يكون فوق المنحني (γ̄) مهما كان $س_{0}$ ≤ س ≤ $س_{1}$. نجد ثلاث وضعيات ممكنة هي :

1 – المنحنيان (γ) وَ (γ̄) فوق محور الفواصل يكون :

∀ س ∋ [$س_{0}$ ، $س_{1}$] ، تا(س) ≥ 0 ها(س) ≥ 0 ومنه :



مـ$_1$ = $\int_{س_0}^{س_1}$ تا(س) تفاس ،

مـ$_2$ = $\int_{س_0}^{س_1}$ ها(س) تفاس

إذن مـ = مـ$_1$ − مـ$_2$

مـ = $\int_{س_0}^{س_1}$ تا(س) تفاس − $\int_{س_0}^{س_1}$ هـا(س) تـفاس .

مـ = $\int_{س_0}^{س_1}$ [تـا(س) −هـا(س) تـفاس .

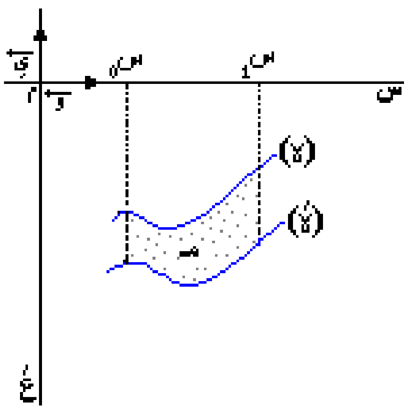
2 −المنحنيان(γ) وَ (γ̄) فوق محور الفواصل يكون :

∀ س ∍ [س$_0$ ، س$_1$] ، تا(س) ≤ 0 ، ها(س)≤ 0 ومنه:

مـ$_1$ = $\int_{س_0}^{س_1}$ تـا(س) تـفاس ،

مـ$_2$ = $\int_{س_0}^{س_1}$ −هـا(س) تـفاس .

إذن مـ = مـ$_2$ − مـ$_1$

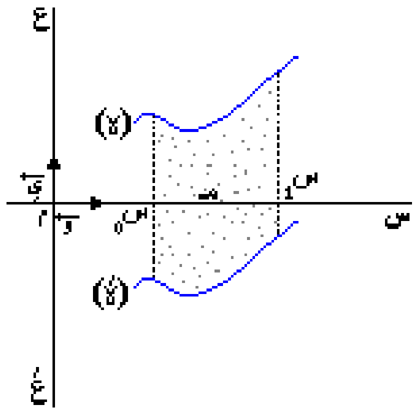


مـ = $\int_{س_0}^{س_1}$ − ها(س) تفاس − $\int_{س_0}^{س_1}$ − تا(س) تفاس

مـ = − $\int_{س_0}^{س_1}$ ها(س) تفاس + $\int_{س_0}^{س_1}$ تا(س) تفاس .

مـ = $\int_{س_0}^{س_1}$ [تـا(س) − هـا(س)] تـفاس.

3 − إذا كـان الـمنـحنـي (γ) فوق محـور الـفواصـل والمـنـحنـي (γ̄) تـحت محور الفواصل يكـون : ∀ س ∍ [س$_0$ ، س$_1$] ، تا(س) ≥ 0 هـا(س) ≤ 0 ومنـه : مـ$_1$ = $\int_{س_0}^{س_1}$ تـا(س) تـفاس .



مـ$_2$ = $\int_{س_0}^{س_1}$ هـا(س) تـفاس .

إذن : مـ = مـ$_1$ + مـ$_2$

مـ = $\int_{س_0}^{س_1}$ تا(س) تفاس + $\int_{س_0}^{س_1}$ − ها(س) تفاس .

مـ = $\int_{س_0}^{س_1}$ [تـا(س) − هـا(س)] تـفاس .

نتيجة :

إذا كان المنحنى (γ) فوق المنحني $(\bar{\gamma})$ فإن المساحة المحصورة بينهما من أجل س∋ [$س_0$ ، $س_1$] هي :

مـ = $\int_{س_0}^{س_1}$ [تا(س) − ها(س)] تفاس .

• **ملاحظة** : المساحة المحصورة بين منحنيين لا تتعلق بوضعيتهما بالنسبة لمحور الفواصل.

8 − 1 − 3 − مثال :

تا وَ ها دالتان عدديتان حيث تا(س) = تجب س وَ ها(س) = جب س .

أحسب المساحة المحصورة بين منحنيهما (γ) وَ$(\bar{\gamma})$ على الترتيب والمستقيمين س = 0 وَ س = $\frac{\pi}{2}$.

$\left(\|\vec{و}\| = \|\vec{ي}\| = 1 \text{ سم}\right)$

الحل : نلاحظ من الشكل أن :

$\forall$ س ∋ [0 ، $\frac{\pi}{2}$] ، ها(س) $\leq$ تا(س) أي أن المنحني $(\bar{\gamma})$ تحت المنحني (γ) ومنه : $مـ_1$ = $\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ [تا(س) − ها(س)] تفاس .

إذن : $مـ_1$ = $\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ (تجب س − جب س) تفاس

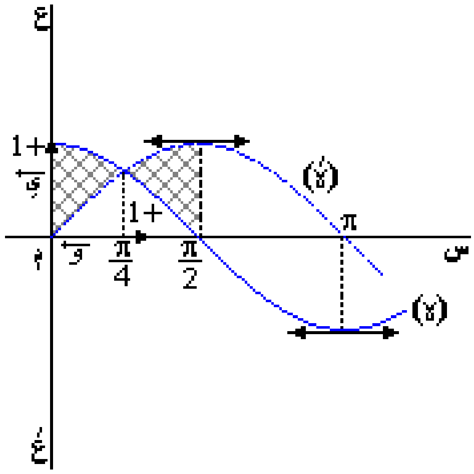
$$مـ_1 = [\text{جب س} + \text{تجب س}]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\text{جب}\frac{\pi}{4} + \text{تجب}\frac{\pi}{4}\right) - (\text{جب}0 + \text{تجب}0)$$

$$مـ_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0 - 1) = \left(\sqrt{2} + 1\right) \text{ سم}^2$$

كذلك : $\forall$ س ∋] $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{2}$]، تا(س) $\geq$ ها(س) أي أن المنحني $(\bar{\gamma})$ فوق المنحني (γ)

ومنه : $مـ_2$ = $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ [ها(س) − تا(س)] تفاس .

إذن : $م_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ (جب س − تجب س) تفاس = $\left[-\text{تجب س} - \text{جب س} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$



$م_2 = (-\text{تجب}\ \frac{\pi}{2} - \text{جب}\ \frac{\pi}{2}) - (-\text{تجب}\ \frac{\pi}{4} - \text{جب}\ \frac{\pi}{4})$

$م_2 = -1 + \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)$ سم^2

نستنتج المساحة المطلوبة وهي :

$م = م_1 + م_2$

إذن $م = 2\sqrt{2}$ سم^2

ملاحظة : وحدة المساحة تتوقف على الوحدة المختارة على المحورين.

9 – تمارين التصحيح الذاتي :

9 – 1 – لتكن تا و هـا دالتين عدديتين معرفتين على ح − {−1} حيث :

$$\text{تا}(س) = \frac{-2س^3 + 1}{(س^3 + 1)^2} \quad \text{و} \quad \text{هـا}(س) = \frac{س}{س^3 + 1} .$$

1 – بين أن هـا دالة قابلة للاشتقاق على ح − {−1} ثم أحسب هاَ(س). ماذا تستنتج ؟

2 – عين الدالة الأصلية φ للدالة تا حيث φ (0) = −3 .

9 – 2 – عين الدالة الأصلية ها للدالة تا إذا علمت أن :

$$\text{تا}(س) = س\sqrt{س^2 + 4} \quad \text{و} \quad \text{هـا}(س) = (أس^2 + ب\,س + جـ).\sqrt{س^2 + 4}$$

حيث يُطلب تحديد قيمة كل من الأعداد الحقيقية أ ، ب ، جـ.

9 – 3 – أحسب التكاملات غير المحدودة الآتية :

1 – $\int (س + 3)(س^2 + 6س - 5)^7$ تفاس .

2 – $\int \left(3س + 2 - \frac{1}{(س - 4)^2}\right)$ تفاس حيث $س \neq 4$.

3 – $\int \frac{2س+1}{\left(س^3+س+1\right)^2}$ تفـاس .

4 – $\int \frac{س}{\sqrt{س^2+1}}$ تفاس .

5 – تـجـب (2 س – $\frac{\pi}{3}$) تفـاس .

6 –تـجـب^2 س جـب س تـفـاس .

7 – $\int \frac{س}{(س+1)^3}$ تفـاس .

8 –$\int$ س^2 جـب س تـفـاس .

9 –$\int$ جـب^2 س تـفـاس .

9 – 4 – لنعتبـر الدالـتيـن تـا وَ هـا حيث تا(س) = س^2 – 2 س + 1.

وَ هـا(س) = س^3 – 3 س + 2 .

1 – تحـقق من أن :$\forall$ س $\in$ ح ، هـا(س) – تـا(س) = (س +1) (س –1)^2.

2 – أحسـب المسـاحـة المحصـورة بيـن المـنحـنـي (γ) المـمثـل للدالـة تـا ومحـور الفـواصـل والمـسـتـقيـميـن ذو المـعـادلـتيـن س = –1 وَ س = 0 .

3 – عيــن نـقـط تقــاطـع المـنحـنــي (γ) والـمـنحـنــي (ي) لـلمــثـل لـلدالــة هــا. ثــم أحســب المسـاحـة المحصـورة بيـن المـنحـنيين (γ) وَ (ي) والمـسـتـقيـمين ذو المـعـادلـتين : س = –1 وَ س = +1. ($\|\vec{و}\| = \|\vec{ي}\| = 1$ سم) .

10 – الأجـوبـة :

10 – 1 – حل التمـريـن 9 – 1 :

1 – الدالــة هـا هـي دالـة نـاطـقـة معـرفـة علـى ح –{ –1} إذن هـا قـابـلـة لـلاشـتـقـاق عـلـى ح – { –1} وعددهـا المشـتـق هـاَ(س) هـو : هاَ(س) = $\frac{1\left(س^3+1\right)-3س^2.س}{\left(س^3+1\right)^2}$ ومنه : هـاَ(س) = $\frac{-2س^3+1}{\left(س^3+1\right)^2}$.

نلاحظ أن هاَ = تا وبالتالي نستنتج أن الدالة ها هي دالة أصلية للدالة تا.

2 – تعيين الدالة الأصلية للدالة تا حيث φ (0) = −3 :

بما أن ها دالة أصلية للدالة تا فإن φ (س) = ها(س) + جـ حيث جـ ∋ ح.

ومنه φ (0) = −3 ⟸ ها(0) + جـ = −3 و منه جـ = −3 لأن ها(0) = 0 .

إذن φ (س) = $\frac{س}{س^{3}+1} - 3$.

10 – 2 – تعيين قيم ٱ ، ب ، جـ حتى تكون ها دالة أصلية للدالة تا .

لدينا : ها دالة أصلية للدالة تا⟸ هاَ = تا ومنه :

هاَ(س) = تا(س) ⟸ [(ٱ س^{2} + ب س + جـ) $\sqrt{س^{2}+4}$]′ = س $\sqrt{س^{2}+4}$.

$$\Leftarrow (2 ٱ س + ب) \sqrt{س^{2}+4} + \frac{2س\left(ٱس^{2}+ب س+جـ\right)}{2\sqrt{س^{2}+4}}$$

$$= س \sqrt{س^{2}+4} .$$

$$\Leftarrow \frac{2\,(ٱس+ب)\left(س^{2}+4\right)+س\left(ٱس^{2}+ب س+جـ\right)}{\sqrt{س^{2}+4}} = س \sqrt{س^{2}+4}$$

ومنه 2ٱ س^{3}+8ٱس+ب س^{2}+4 ب+ٱس^{3}+ب س^{2}+جـ س = س $\sqrt{س^{2}+4}$. $\sqrt{س^{2}+4}$

3 ٱ س^{3}+2 ب س^{2}+(8ٱ +جـ) س +4 ب = س (س^{2} + 4).

3 ٱ س^{3}+2 ب س^{2}+(8 س +جـ) س +4 ب = س^{3} + 4 س.

نستنتج بالمطابقة ما يلي :⟸

$$\begin{cases} 3ٱ = 1 \\ 2ب = 0 \\ 8ٱ + جـ = 4 \\ 4ب = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} ٱ = \frac{1}{3} \\ ب = 0 \\ جـ = \frac{4}{3} \end{cases}$$

وبالتالي : ها(س) = $\frac{1}{3}$(س^{2} + 4) $\sqrt{س^{2}+4}$.

10 – 3 – حساب التكاملات غير المحدودة :

1 – حساب : ∫(س+3) (س^{2} + 6س − 5)^{7} تفاس.

نستخدم طريقة تغيير المتحول بوضع ع =س^{2}+6 س−5 ومنه: تفاع =(2 س+6) تفاس

نجد تفاع = 2(س+3) تفاس ومنه $\frac{\text{تفاع}}{2}$ = (س+3) تفاس .

وبالتالي : $\int (\text{س}+3)(\text{س}^2+6\text{س}-5)^7 \text{ تفاس} = \int \text{ع}^7 \frac{\text{تفاع}}{2} = \frac{1}{2}\int \text{ع}^7 \text{ تفاع}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{ع}^8}{8} + \text{جـ} = \frac{\text{ع}^8}{16} + \text{جـ}$$

إذن : $\int (\text{س}+3)(\text{س}^2+6\text{س}-5)^7 \text{ تفاس} = \frac{\left(\text{س}^2+6\text{س}-5\right)^8}{16} + \text{جـ}$.

2 − حساب $\int \left(3\text{س} + 2 - \frac{1}{(\text{س}-4)^2}\right) \text{تفاس}$.

$$\int \left(3\text{س}+2-\frac{1}{(\text{س}-4)^2}\right) \text{تفاس} = \int (3\text{س}+2) \text{ تفاس} - \int \frac{1}{(\text{س}-4)^2}\text{تفاس}$$

$$= \frac{3\text{س}^2}{2} + 2\text{س} - \int \frac{1}{(\text{س}-4)^2}\text{تفاس}$$

نحسب $\int \frac{1}{(\text{س}-4)^2}$تفاس : بوضع س − 4 = α نجد تفاα = تفاس

ومنه $\int \frac{1}{(\text{س}-4)^2} \text{ تفاس} = \int \frac{1}{\alpha^2} \text{ تفا}\alpha = -\frac{1}{\alpha} + \text{جـ}_1$ ، $\text{جـ}_1 \in$ ح

$$= -\frac{1}{\text{س}-4} + \text{جـ}_1 .$$

وبالتالي: $\int \left(3\text{س} + 2 - \frac{1}{(\text{س}-4)^2}\right) \text{تفاس} = \frac{3}{2}\text{س}^2 + 2\text{س} - \left(-\frac{1}{\text{س}-4} + \text{جـ}_1\right)$

$$= \frac{3}{2}\text{س}^2 + 2\text{س} + \frac{1}{\text{س}-4} - \text{جـ}_1$$

$$= \frac{3}{2}\text{س}^2 + 2\text{س} + \frac{1}{\text{س}-4} - \text{جـ} \text{ ، جـ} \in \text{ح} .$$

3 − حساب : $\int$ تا(س) تفاس = $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+1}}$ تفاس.

نضع ع = $س^{2} + 1 \Leftarrow$ تفاع = 2س تفاس ومنه $\frac{\text{تفاع}}{2}$ = س تفاع.

$$\int \text{تا(س) تفاس} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{ع}} \text{تفاع}$$

$$= \frac{1}{2} \int ع^{-\frac{1}{2}} \text{تفاع}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{ع^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \text{جـ} = ع^{\frac{1}{2}} + \text{جـ} = \sqrt{ع} + \text{جـ}$$

ومنه $\int \frac{س}{\sqrt{س^{2}+1}}$ تفاس = $\sqrt{س^{2}+1}$ + جـ ، جـ ∈ ح.

4 – $\int$ تا(س) تفاس $\int \frac{2س+1}{\left(س^{2}+س+1\right)^{2}}$ تفاس .

نضع ع = $س^{2}$ + س + 1. ومنه تفاع = (2 س +1) تفاس .

يكون :$\int$ تا(س) تفاس =$\int \frac{1}{ع^{2}}$ تفاع

$$= -\frac{1}{ع} + \text{جـ}$$

تا(س) تفاس = $-\frac{1}{س^{2}+س+1}$ +جـ + جـ ، جـ ∈ ح.

5 – $\int$ تا(س) تفاس =$\int$ تجب (2س − $\frac{\pi}{3}$) تفاس .

بوضع ع = 2س − $\frac{\pi}{3}$ نجد تفاع = 2 تفاس ومنه $\frac{\text{تفاع}}{2}$ = تفاس

يكون $\int$ تجب (2س − $\frac{\pi}{3}$) تفاس =$\int$ تجب ع $\frac{\text{تفاع}}{2}$

= $\frac{1}{2} \int$ تجب ع تفاع = $-\frac{1}{2}$ جب ع +جـ .

$$\text{تجب}\left(2\text{س} - \frac{\pi}{3}\right)\text{تفاس} = -\frac{1}{2}\left(2\text{س} - \frac{\pi}{3}\right) + \text{جـ} .$$

6 − ∫ تا(س) تفاس =∫ تجب^2 س جب س تفاس .

بوضع ع = تجب س. ومنه : تفاع = −جب س تفاس.أي : − تفاع = جب س تفاس

ويكون : ∫ تجب^2 س جب س تفاس =∫ −ع^2 تفاع .

$$= -\frac{\text{ع}^3}{3} + \text{جـ}$$

$$= -\frac{\text{تجب}^3\text{س}}{3} + \text{جـ} .$$

7 −∫ تا(س) تفاس =∫ $\dfrac{\text{س}}{(\text{س}+1)^3}$ تفاس. نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة.

نضع : $\begin{cases} \text{ع} = \text{س} \\ \text{تفا ص} = \dfrac{1}{(\text{س}+1)^3}\ \text{تفا س} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \text{تفا ع} = \text{تفا س} \\ \text{ص} = -\dfrac{1}{2(\text{س}+1)^2} \end{cases}$

وبالتالي :

$$\int \frac{\text{س}}{(\text{س}+1)^3}\ \text{تفا س} = -\frac{\text{س}}{2(\text{س}+1)^2} + \int \frac{1}{2(\text{س}+1)^2}\ \text{تفا س}$$

$$= -\frac{\text{س}}{2(\text{س}+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\text{س}+1)^2}\ \text{تفا س}$$

$$\int \frac{\text{س}}{(\text{س}+1)^3}\ \text{تفا س} = -\frac{\text{س}}{2(\text{س}+1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{س}+1} + \text{جـ} ،\ \text{جـ} \in \text{ح}$$

8 −∫ تا(س) تفاس =∫ س^{2}جب س تفاس . نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة.

بوضع : $\begin{cases} \text{ع} = \text{س}^2 \\ \text{تفا ص} = \text{جب س} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \text{تفا ع} = 2\text{س}\ \text{تفا س} \\ \text{ص} = -\ \text{تجب س} \end{cases}$

يكون : ∫ س^{2}جب س تفاس = − س^2 تجب س +∫2 س تجب س تفاس.

=− س^2 تجب س+∫2س تجب س تفاس.

ثم نحسب $\int$ س تجب س تفاس بنفس الطريقة .

وَبوضع : $\begin{cases} \alpha = \text{س} \\ \text{تفا}\ \beta = \text{تجب س} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \text{تفا}\ \alpha = \text{تفـ س} \\ \text{ص} = \text{جب س} \end{cases}$

إذن: $\int$ س تجب س تفاس = س جب س $-\int$ تجب س تفاس = س جب س+جب س+جـ

ومنه : $\int$ س^2 جب س تفاس = $-$س^2 تجب س+2(س جب س+جب س+جـ)

$=-$ س^2 تجب س+2 س جب س+2 جب س+2جـ.

س^2 جب س تفاس = $-$س^2 تجب س+2 س جب س+2 جب س+جـ ، جـ$\in$ ح .

9 $-\int$ تا(س) تفاس $=\int$جب^2 س تفاس .

لدينا تجب 2س = تجب^2 س $-$ جب^2 س

= 1 $-$ جب^2 س $-$ جب^2 س

= 1 $-$ 2جب^2 س

ومنه جب^2 س= $\dfrac{1-\ \text{تجب 2 س}}{2}$.

إذن : $\int$ جب^2 س تفاس = $\dfrac{1-\ \text{تجب 2 س}}{2}$ تفاس

$= \dfrac{1}{2}\int(1-\ \text{تجب 2 س})\ \text{تفا س}$

$= \dfrac{1}{2}\int \text{تفا س} - \dfrac{1}{2}\int \text{تجب 2 س تفا س}$

$= \dfrac{1}{2}\text{س} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\text{جب 2 س}\right) + \text{جـ}$

$= \dfrac{1}{2}\text{س} - \dfrac{1}{4} + \text{جب2س} + \text{جـ}$ ، جـ $\in$ ح

10 – 4 – لدينا تا(س) = س^2 $-$2 س + 1 وَ ها(س) = س^3 $-$ 3 س + 2 .

1 – تحقيق المساواة ها(س) – تا(س) = (س + 1) (س $-$1)^2 .

لدينا ها(س) – تا(س) = (س^3 $-$ 3 س + 2) – (س^2 $-$ 2 س +1) .

= س^3 $-$ 3 س + 2 – س^2 + 2 س – 1

= س^3 $-$ س^2 $-$ س + 1

= س^2 (س − 1) − (س − 1)

= (س − 1) (س^2 − 1) .

= (س − 1) (س − 1) (س + 1)

= (س + 1) (س − 1)^2 .

2 − حساب المساحة المحصورة بين المنحني (γ) ومحور الفواصل .

لدينا : $\forall$ س ∋ ح : تا(س) = (س − 1)^2 ومنه : $\forall$ س ∋ ح : تا(س) ≥ 0 .

نستنتج أن المنحني (γ) فوق محور الفواصل وبالتالي : $\forall$ س ∋ ح : $\int_{-1}^{0}$ تا(س) تفاس =

$$\int_{-1}^{0} (\text{س}^2 - 2\text{س} + 1)\,\text{تفاس} = \left[\frac{\text{س}^3}{2} - \text{س}^2 + \text{س}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\left(-\frac{1}{3}\right) - 1 - 1\right] = \frac{7}{3}$$ وحدة

المساحة .

3 − حساب المساحة المحصورة بين (γ) وَ (ي) والمستقيمين الذين معادلتهما س = −1 وَ س = +1 .

بما أن : $\forall$ س ∋ ح ها(س) − تا(س) = (س + 1) (س − 1)^2

فإن : $\forall$ س ∋ [−1 ، +1] : س + 1 ≥ 0 وَ (س − 1)^2 ≥ 0 ومنه يكون

(س + 1) (س − 1)^2 ≥ 0 . أي ها(س) − تا(س) ≥ 0 نستنتج أن ها(س) ≥ تا(س)

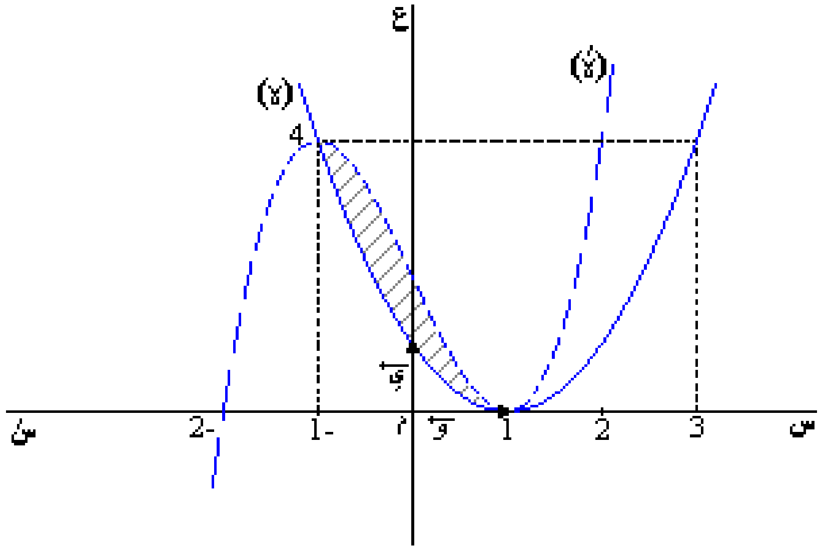
وبالتالي المنحني (ي) فوق المنحني (γ) عندئذ : المساحة هي :

مـ = : $\int_{-1}^{0}$ [ها(س) − تا(س)] تفاس = $\int_{-1}^{1}$ (س^3 − س^2 − س + 1) تفاس

$$\text{مـ} = \left[\frac{\text{س}^4}{4} - \frac{\text{س}^3}{3} - \frac{\text{س}^2}{2} + \text{س}\right]_{-1}^{+1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right)$$

$$\text{مـ} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{2}{3}$$

$$\text{مـ} = \frac{4}{3}\ \text{سم}^2$$


ع
(ك)
(كَ)
4
2-
1-
1
2
3
س
سَ
م

الدالـة اللـوغـاريـتـمـيـة والـدالـة الأسـيـة

. **الأهـداف مـن الـدرس** : تـزويـد الطـالـب بـأداة ريـاضـيـة جديـدة مـن خـلال تـعـريـفه بهذه الـدوال وخـواصـهـا الجبـريـة والـتـحـلـيلـيـة.

– تمكـين الطـالـب من إسـتـغـلال هذه الأدوات في بعض التقـنيـات الـتـحـليلـيـة مثـل التكـامـل وحل بعض المعـادلات الـتـفـاضـلـيـة.

– تـعـمـيـم الدراسـة إلـى الدوال اللـوغـاريـتـمـيـة والأسـيـة ذات الأسـاس الكـيـفـي.

الـمـدة الـلازمـة لـدارسـتـه : 10 ســـاعـات.

الـدروس الـواجـب مـراجـعـتـهـا : درس الـدوال الأصـلـيـة.

الـمـراجـع الـخـاصـة بـهـذا الـدرس : كـتـاب الـريـاضـيـات لـلـسـنـة 3 ث / ع + ر الـمـعـهـد الـتـربـوي الـوطـنـي.

تـصـمـيـم الـدرس

- تـمـهـيـد.
1 – الـدالـة الـلـوغـارتـمـيـة الـنـيـبـيـريـة.
2 – الـدالـة الأسـيـة الـنـيـبـيـريـة.
3 – الـدالـة الـلـوغـارتـمـيـة ذات الأسـاس الـكـيـفـي.
4 – الـدالـة الأسـيـة ذات الأسـاس الـكـيـفـي.
5 – تـمـاريـن الـتـصـحـيـح الـذاتـي.
6 – الأجـوبـة.

تمهيد :

عدد سكان بلد ما، إنخفاض حرارة جسم، النشاط الإشعاعي لبعض المواد، مدة تصفية دواء في الدم هي ظواهر طبيعية مختلفة يُعبّر عن تغيراتها بواسطة الدوال الأسية أو اللوغاريتمية.

هذا يدل على أهمية هذه الدوال في الدراسات العلمية بالإضافة إلى أهميتها في الرياضيات.

لا يمكن إذن لمن يرغب في اكتشاف ثقافة علمية ولو كانت متواضعة أن يجهلها.

نحاول في هذا الدرس أن نعرفك أيها الطالب بهذه الدوال وخواصها الجبرية والتحليلية الأساسية.

1- الدالة اللوغارتمية النبيرية : (*).

1 - 1 - تعريف و نتائج مباشرة :

1 - 1 - 1 - طرح المسألة :

لقد رأينا في درس الدوال الأصلية أنه لا يوجد دستور تكامل للدالة : س $\mapsto \frac{1}{س}$ لأن

الدستور : $\int$ س^{ر} تفاس = $\frac{س^{ر+1}}{ر+1}$ + ك لا يطبق في حالة ر = -1 .

لكن الدالة س$\mapsto \frac{1}{س}$ تقبل دوالا أصلية في كل من المجالين] $-\infty$ ، 0 [و] 0 ، $+\infty$ [

لأنها مستمرة في المجالين. لندرس إحدى الدوال الأصلية لها المعرفة في المجال] 0 ، $+\infty$ [والتي تنعدم عندما س = 1

1 - 1 - 2 - تعريف :

نسمي الدالة اللوغاريتمية النيبيرية أو "لوغارتم نبيري" الدالة الأصلية للدالة : س$\mapsto \frac{1}{س}$ المعرفة على المجال] 0 ، $+\infty$ [والتي تنعدم عندما س = 1. نرمز لها بالرمز " لو " .

ولدينا حسب التعريف السابق : مهما كان العدد س في المجال] 0 ، +∞ [

لو س = $\int_{1}^{س} \frac{1}{ط}$ تفاط.
(لو س)َ = $\frac{1}{س}$.
لو 1 = 0.

1 - 1 - 3 - إستنتاجات من التعريف :

- الدالة " لو " قابلة للاشتقاق (الدالة المشتقة هي س↤$\frac{1}{س}$)

وبالتالي مستمرة على المجال] 0 ، +∞[.

- " لو متزايدة " تماما على المجال] 0 ، +∞[.

(لأن $\frac{1}{س}$ 〉 0 إذا كان : س ∋] 0 ، +∞ [ ).

- مهما كان س من المجال] 0 ، +∞ [فإن :

لو س < 0 ⇔ 0 < س < 1 لأن الدالة " لو " متزايدة تماما.

لو س = 0 ⇔ س = 1.

لو س > 0 ⇔ س > 1 لأن الدالة "لو" متزايدة تماما أي س >1 ⇔ لوس > لو 1

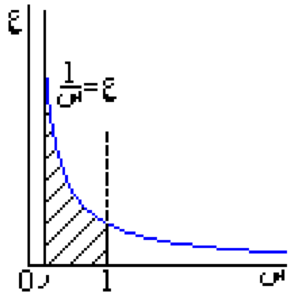
⇔ لوس > 0

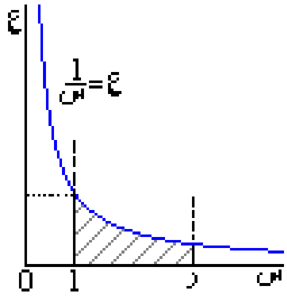
الخلاصة :

"لو" دالة معرفة، مستمرة ، قابلة للاشتقاق ومتزايدة تماما على المجال] 0 ، +∞ [ويكون لو س موجبا من أجل س> 1 معدوما من أجل س = 1 وسالبا من أجل س < 1 .

1 - 1 - 4 - التمثيل الهندسي :

حسب ما رأينا في حساب المساحات وحسب تعريف "لو" فإن : لو ر هي مساحة الحيز المحدد بالمنحنيات التي معادلتها : ع = $\frac{1}{س}$ ، ع = 1 ، س = ر ، س = 0 .





$0 \langle \text{ر} \langle 1 \Leftrightarrow \int_1^{\text{ر}} \frac{1}{\text{س}}$ تفاس $\langle 0$ ، ر $> 1 \Leftrightarrow$ لو ر > 0

1 – 2 – الخواص الجبرية :

1 – 2 – 1 – الخاصة الأساسية :

ليكن ﺃ في $ح^*_+$ والدالة ها : $ح^*_+ \rightarrow$ ح حيث ها(س) = لو ﺃ س. إذا سمينا ي الدالة : س $\mapsto$ ﺃ س = ي (س) فإن ها(س) = لو [ي(س)] ومنه : هاَ(س) = لوَ [ي(س)] × يَ(س) = $\frac{\text{يَ(س)}}{\text{ي(س)}} = \frac{\text{ﺃ}}{\text{ﺃس}} = \frac{1}{\text{س}}$.

هذا معناه أن "ها" دالة أصلية لِـ س$\mapsto \frac{1}{\text{س}}$ مثل الدالة "لو" وبالتالي الفرق ها(س) – لو س عدد ثابت وليكن ك.

إذن : ها(س) – لو س = ك ، لنعين ك بأخذ س = 1 فيكون لدينا : ها(1) – لو 1 = ك أي ها(1) = ك (لأن لو 1 = 0).

أي لوﺃ . 1 = ك . يعني لوﺃ = ك .

وبما أن ها(س) = لو س + ك فإن : لوﺃ س = لو س + لوﺃ .

وباعتبار أن ﺃ وَ س عددان موجبان تماما وكيفيان يكون لدينا :

$\boxed{\forall\ (\text{ﺃ ، ب}) \in ح^*_+ \times ح^*_+ : \text{لو ﺃ ب = لوﺃ + لو ب .}}$

1 – 2 – 2 – نتيجة 1 :

ب عدد حقيقي موجب تماما لدينا : لو (ب × $\frac{1}{\text{ب}}$) = لو ب + لو $\frac{1}{\text{ب}}$.

لكن لو (ب × $\frac{1}{\text{ب}}$) = لو1 = 0 . إذن لو ب + لو $\frac{1}{\text{ب}}$ = 0 أي :

$$\boxed{\text{لو}\ \frac{1}{\text{ب}} = -\ \text{لو ب}}$$

1 − 2 − 3 − نتيجة 2 :

$\forall$ (أ ، ب) $\in \text{ح}^*_+ \times \text{ح}^*_+$: $\text{لو}\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right) = \text{لو}\left(\text{أ}\times\frac{1}{\text{ب}}\right) = \text{لوأ} + \text{لو}\ \frac{1}{\text{ب}} = \text{لوأ} - \text{لوب}$.

إذن :

$$\boxed{\forall\ (\text{أ ، ب}) \in \text{ح}^*_+ \times \text{ح}^*_+ : \text{لو}\ \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{لوأ} - \text{لوب}}$$

1 − 2 − 4 − نتيجة 3 :

$$\boxed{\forall\ \text{أ} \in \text{ح}^*_+ \text{ ، } \forall\ \text{ن} \in \text{ص} : \text{لو أ}^{\text{ن}} = \text{ن لوأ.}}$$

لنبرهن أولا على صحة الدستور من أجل كل ن من ط بالتراجع .

- من أجل ن = 0 لدينا : لوأ^0 = لو 1 = 0 وَن لوأ = 0 . لوأ = 0 .

إذن : لوأ^0 = 0 . لو أ . فالدستور محقق من أجل ن = 0

- لنفرض أن الدستور محقق من أجل ن يعني أن : $\text{لوأ}^{\text{ن}}$ = ن لو أ .

ولنبرهن أن الدستور المحقق من أجل ن+1. أي : $\text{لوأ}^{\text{ن}+1}$ = (ن+1) لوأ.

لدينا : $\text{لوأ}^{\text{ن}+1} = \text{لو}(\text{أ}^{\text{ن}} \times \text{أ}) = \text{لوأ}^{\text{ن}} + \text{لوأ}$

أي : $\text{لوأ}^{\text{ن}+1}$ = ن لوأ + لوأ = (ن+1) لوأ .

إذن الدستور محقق من أجل ن+1. فهو محقق من أجل كل ن من ط.

نمدد مجال صحة الدستور إلى ص بأخذ $\text{أ}^{-\text{نَ}} = \frac{1}{\text{أ}^{\text{نَ}}}$ وَ (نَ $\in$ ط)

1 − 2 − 5 − نتيجة 4 :

$$\boxed{\begin{array}{r} \forall\ \text{أ} \in \text{ح}^*_+ \text{ ، } \forall\ \text{ن} \in \text{ط}^* : \text{لو}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} = \frac{1}{\text{ن}}\ \text{لوأ .} \\ \forall\ \text{أ} \in \text{ح}^*_+ \text{ ، } \forall\ \text{ر} \in \text{ك} : \text{لوأ}^{\text{ر}} = \text{ر لوأ .} \end{array}}$$

البرهان :

1) − $\text{لو}\left(\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}\right)^{\text{ن}} = \text{ن لو}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ وَ $\text{لو}\left(\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}\right)^{\text{ن}} = \text{لوأ}$

إذن ن لو $\sqrt[ن]{أ}$ = لوأ . أي لو $\sqrt[ن]{أ} = \frac{1}{ن}$ لوأ .

2) – لنضع ر = $\frac{ن}{م}$ حيث ن∋ ص وَ م ∋ ط* .

لو $\left(\sqrt[م]{أ}\right)^{ن}$ = ن لو $\sqrt[م]{أ}$ ن ($\frac{1}{م}$. لوأ) = $\frac{ن}{م}$ لوأ = ر لوأ .

1 – 3 – الدراسة التحليلية للدالة اللوغارتمية النبيرية :

1 – 3 – 1 – النهاية عند +∞ :

* الدالة "لو" قابلة للاشتقاق على المجال] 1 ، 2 [ومستمرة على المجال [1 ، 2] ، يوجد إذن عدد جـ من] 1 ، 2[بحيث : لو2 = لو1 + (2–1) لوَجـ (حسب نظرية التزايدات المنتهية)

يعني : لو2 = 0 +1. $\frac{1}{جـ}$ أي لو2 = $\frac{1}{جـ}$ مع العلم أن 1< جـ< 2 أي أن $\frac{1}{2} < \frac{1}{جـ} < 1$ ومنه :

$\frac{1}{2} <$ لو2 < 1. لكن لو4 = لو2^2 = 2 لو2.

إذن 1< لو4 < 2 ومنه ن< ن لو4 < 2 ن .

أي ن < لو$4^ن$ < 2 ن .

نعلم أن "لو" دالة متزايدة تماما إذن :

∀ س ∋ ح$^*_+$: س > $4^ن$ ⇐ لوس > $4^ن$ وَ لو$4^ن$ > ن إذن :

س > $4^ن$ ⇐ لوس > ن .

● لنبين أن نهالو = + ∞ (عند +∞) ولإثبات ذلك يكفي أن نبين أنه : مهما كان العدد الحقيقي الموجب ب يوجد عدد موجبأ بحيث : س>أ ⇐ لو س > ب .

ليكن ب> 0 يوجد عدد طبيعي ن بحيث : ن – 1≤ ب < ن.

لنضع أ = $4^ن$ يكون لدينا :

س > أ ⇐ س > $4^ن$ وَ س > $4^ن$ ⇐ لوس > ن > ب .

إذن س > أ ⇐ لو س > ب .

إذن $\boxed{\lim_{+\infty} \text{لو} = +\infty}$

1 - 3 - 2 - النهاية 0^+ :

لنبين أن : $\boxed{\lim_{0^+} \text{لو} = -\infty}$

لنضع $ع = \frac{1}{س}$ ، لما $س \leftarrow 0^+$ ، $ع \leftarrow +\infty$ إذن :

$\lim_{س \to 0^+} \text{لو}\, س = \lim_{س \to +\infty} \text{لو} \frac{1}{ع} = \lim_{ع \to +\infty} [-\text{لو}\, ع] = -\lim_{ع \to +\infty} \text{لو}\, ع = -\infty$.

1 - 3 - 3 - خلاصة :

"لو" دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0 ، +\infty[$ بالإضافة إلى أن :

$\lim_{0^+} \text{لو} = -\infty$ وَ $\lim_{+\infty} \text{لو} = +\infty$ إذن :

"لو" تقابل من $]0 ، +\infty[$ إلى $]-\infty ، +\infty[$.

وباعتبار أن لو($أ$. ب) = لو$أ$ + لوب نحصل على

الخلاصة :

لو تشاكل تقابلي من الزمرة ($ح^*_+$ ، ×) إلى الزمرة (ح،+).

1 - 3 - 4 - العدد هـ : بما أن "لو" تقابلا من $ح^*_+$ إلى ح فإنه يوجد عدد حقيقي موجب وحيد نرمز له هـ بحيث : لو هـ = 1. نعلم أن : لو2 < 1 < لو4 (أنظر إلى 1.3.1) أي أن : 2 < هـ < 4 بصفة أدق يبرهن أن هـ عدد أصم (مثل π) قيمته المقربة إلى 10^{-3} بالنقصان هي :

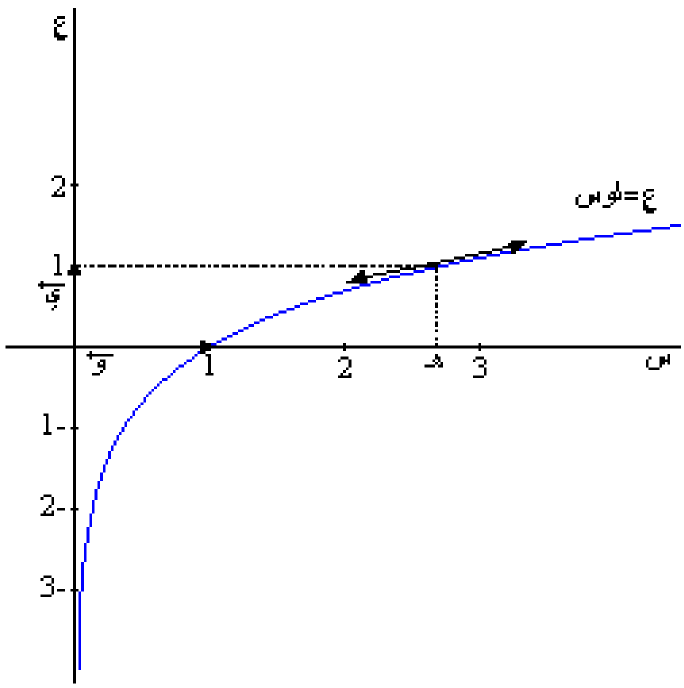
$\boxed{هـ = 2{,}718}$

1 – 3 – 5 – تغيرات الدالة و تمثيلها البياني :

حسب كل ما سبق يمكن تلخيص تغيرات الدالة في الجدول التالي :

س	0		1		هـ		∞+
$\frac{1}{س}$	‖	+		+		+	
لوس	‖ ∞−		0		1		∞+

التمثيل البياني :



1 – 3 – 6 – نهاية $\frac{\text{لو س}}{\text{س}}$ عند + ∞ :

لنبين أن : $\lim_{\text{س} \to +\infty} \frac{\text{لو س}}{\text{س}} = 0$

البرهان :

لتكن الدالة تا المعرفة على المجال [1 ، +∞ [

بـ : تا(س) = لوس − 2 $\sqrt{\text{س}}$.

لدينا : تا(1) = لو1 − 2 $\sqrt{1}$ = −2 .

تاَ(س) = $\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}$ علما أن : $\sqrt{\text{س}}$ > س أي $\frac{1}{\text{س}} \langle \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}$ إذا كان س> 1

هذا يعني أن : $\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} \langle 0$. أي تاَ(س)< 0 إذا كان س> 1 .

* تاَ(س) < 0 وَ تا(1)< 0 في]1 ، +∞[معناه أن تا متناقصة في المجال وأكبر قيمة لها سالبة وهذا معناه :

∀ س ∋] 1 ، +∞ [: تاَ(س) > 0

أي : ∀ س ∋] 1 ، +∞ [: 0 ≤ لوس > 2 $\sqrt{\text{س}}$.

وبعد تقسيم الأطراف الثلاثة على س نجد $0 \leq \frac{\text{لو س}}{\text{س}} \langle \frac{2}{\sqrt{\text{س}}}$.

ولكن : $\lim_{\text{س} \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{\text{س}}} = 0$

إذن حسب نظريات النهايات نستنتج $\lim_{\text{س} \to +\infty} \frac{\text{لو س}}{\text{س}} = 0$

1 – 3 – 7 – نهاية $\frac{\text{لو }(1+\text{س})}{\text{س}}$ عند 0 :

لنبين أن : $\boxed{\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{لو }(1+\text{س})}{\text{س}} = 1}$

البـرهـان :

حسـاب مـشـتـق الـدالـة "لـو" عـنـد +1 يـعـطـيـنـا :

$$\text{لوَ}(1) = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{لو}(1+\text{س}) - \text{لو}\,1}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{لو}(1+\text{س})}{\text{س}} = \frac{1}{1} = 1$$

1 – 3 – 8 – نـهـايـة س لـوس عند +0 :

لـنـبـيـن أن : $\boxed{\lim_{\text{س}\to 0^+} \text{س لو س} = 0}$.

البـرهـان :

هـذه الـنـهـايـة مـن أشـكـال عـديـم الـتـعـيـين $(0 \times -\infty)$. لـنـضـع $\text{س} = \frac{1}{\text{ع}}$ ، لـمـا س ← 0^+ ، ع ← $+\infty$. ومـنـه

$$\lim_{\text{س}\to 0^+} \text{س لو س} = \lim_{\text{ع}\to+\infty} \frac{1}{\text{ع}}\,\text{لو}\frac{1}{\text{ع}} = \lim_{\text{ع}\to+\infty} \frac{-\text{لو ع}}{\text{ع}} = 0$$

1 – 3 – 9 – مـشـتـق الـدوال مـن الـشـكـل : س ← لـو [تـا(س)] :

نـظـريـة :

إذا كانـت تــا دالــة قـابـلــة لـلاشـتـقـاق و‌لا تـنـعـدم في المجال ل فـإن الـدالـة المركـبـة هـا المعرفـة على ل بـالمسـاواة هـا(س) = لو | تا(س) | قـابـلـة لـلآشـتـقـاق على ل ويكون لديـنـا : $[\,\text{لو}\,|\text{تا(س)}|\,]' = \frac{\text{تاَ(س)}}{\text{تا(س)}}$

البـرهـان :

تـا قـابـلـة لـلاشـتـقـاق وبـالـتـالـي مـسـتـمـرة عـلـى ل ولا تـنـعـدم في هـذا الـمـجـال هـذا يـعـنـي أن لـهـا إشـارة ثـابـتـة فـي ل.

* إذا كـان تـا(س)> 0 فـي ل :

يـكـون : هـا(س) = لـو | تـا(س) | = لـو [تـا(س)]

ومـنـه هـاَ(س) = لـوَ [تـا(س)] × تـاَ(س) = $\frac{1}{\text{تا(س)}}$ × تـاَ(س) .

أي : هاَ(س) = $\frac{تاَ(س)}{تا(س)}$.

* إذا كان تا(س)< 0 في ل :

يكون : ها(س) = لو |تا(س)| = لو [−تا(س)]

ومنه : هاَ(س) = لوَ × [− تاَ(س)].

أي هاَ(س) = $\frac{1}{-تا(س)}$ × [− تاَ(س)] = $\frac{تاَ(س)}{تا(س)}$

• **نتيجة :**

في كل من المجالين $ح^*_+$ وَ $ح^*_-$ لدينا : [لو |س|]َ = $\frac{1}{س}$.

1 − 3 − 10 − دستور تكامل جديد :

نظرية :

في كل مجال لا تنعدم فيه الدالة تا فإن الدوال الأصلية للدالة ها : س⟵ $\frac{تاَ(س)}{تا(س)}$ هي

الدوال المعرفة في نفس المجال بِ : ي(س) = لو |تا(س)| + ك حيث ك ثابت.

إذن : ∫ $\frac{تاَ(س)}{تا(س)}$تفاس = لو |تا(س)| + ك .   وبالأخص : ∫ $\frac{1}{س}$ تفاس = لو |س| + ك .

مثال : ها(س) = $\frac{2س}{س^2+1}$. لاحظ ها(س) = $\frac{(س^2+1)'}{س^2+1}$

إذن : ∫ $\frac{2س}{س^2+1}$تفاس = لو |س^2+ 1| + ك = لو (س^2+ 1) + ك .

(لأن : س^2+ 1 > 0 من أجل س من ح) .

2 – الدالة الأسية النبيرية :

2 – 1 – تعريف الدالة الأسية النبيرية :

2 – 1 – 1 – مقدمة : رأينا في الدرس السابق أن "لو" تقابل مستمر وقابل للاشتقاق من $ح_+^*$ نحو ح. نستنتج من هذا أن هذه الدالة تقبل دالة عكسية تقابلية مستمرة وقابلة للاشتقاق من ح نحو $ح_+^*$.

2 – 1 – 2 – تعريف :

نسمي دالة أسية ذات الأساس هـ (أو النبيرية) الدالة العكسية للدالة "لو" و نرمز لها " أسية ".

لدينا إذن :

(∀ س ∍ ح) (∀ ع ∍ $ح_+^*$) : ع = أسية (س) ⟺ س = لوع

2 – 1 – 3 – نتائج :

أ – "أسية " معرفة في ح وقيمتها في $ح_+^*$ فهي موجبة تماما.

أي : (∀ س ∍ ح) أسية (س) > 0 .

ب – (∀ س ∍ $ح_+^*$) أسية [لوس] = س.

(∀ س ∍ ح) لو [أسية س] = س.

جـ – لو 1 = 0 ⟺ أسية (0) = 1.

لوهـ = 1 ⟺ أسية (1) = هـ.

2 – 2 – الخواص الجبرية للدالة الأسية :

2 – 2 – 1 – الخاصة الأساسية :

∀ (أ ، ب) ∍ ح × ح : أسية (أ + ب) = أسية(أ) × أسية(ب) .

البرهان : بما أن "لو" تباين يكفي أن نبين أن :

* لو [أسية (أ + ب)] = لو [أسية (أ) × أسية (ب)]

* لو [أسية (أ+ ب)] =أ + ب

* لو [أسية (أ) × أسية (ب)] = لو [أسية (أ)] + لو [أسية (ب)]

= أ + ب . إذن المساواة محققة .

2 – 2 – 2 – نتائج :

أ – $\forall$ (أ ،ب) ∋ ح×ح : أسية (–ب) = $\frac{1}{\text{أسية(ب)}}$ وَأسية (أ – ب) = $\frac{\text{أسية (أ)}}{\text{أسية(ب)}}$

ب – $\forall$ م ∋ ≦ : أسية (م) = هـ^{م} .

جـ – ($\forall$ أ ∋ ح) ($\forall$ م ∋ ≦) : أسية (مأ) = [أسية (أ)] ^{م} .

البرهان : أ – لو[أسية (–ب)] = –ب وَ لو $\frac{1}{\text{أسية(ب)}}$ = – لو [أسية (ب)] = –ب

وبما أن "لو" دالة متباينة فإن النتيجة الأولى محققة.

نستنتج من هذا أن أسية (أ – ب) = أسية [أ +(–ب)] = أسية (أ)× أسية(–ب)

= أسية (أ) × $\frac{1}{\text{أسية(ب)}}$ = $\frac{\text{أسية (أ)}}{\text{أسية(ب)}}$.

ب – لو (هـ^{م}) = م لو هـ = م.1 = م.

لو (أسية م) = م.

جـ – لو [أسية (م أ)] = م أ .

لو [أسية (أ)]^{م} = م لو [أسية (أ)] = م أ .

2 – 2 – 3 – الترميز النهائي للدالة " أسية " :

من خلال الخواص الجبرية أسية (0) = 1 ، أسية (1) = هـ، أسية (ن) = هـ^{ن}

أسية (أ + ب) = أسية (أ) × أسية(ب) .

نلاحظ أنها خواص القوى حيث الأساس هو "هـ" والمتغير يلعب دور الأساس فإذا وضعنا : أسية (س) = هـ^{س}

تصبح كتابة الخواص السابقة على الشكل :

- ($\forall$ س ∋ ح) ($\forall$ ع ∋ ح$^{*}_{+}$) : ع = هـ^{س} ⇔ س = لوع .
- ($\forall$ س ∋ ح) : لو هـ^{س} = س .
- ($\forall$ س∋ ح$^{*}_{+}$) : هـ^{لوس} = س .

  هـ^{0} = 1 وَ هـ^{1} = هـ .
- $\forall$ (أ ، ب) ∋ ح ×ح : هـ$^{أ+ب}$ = هـ^{أ} × هـ^{ب} .

• $\forall$ (أ ، ب) ∋ ج × ج : $هـ^{-ب} = \frac{1}{هـ^{ب}}$ وَ $هـ^{أ-ب} = \frac{هـ^{أ}}{هـ^{ب}}$.

• ($\forall$ أ ∋ ج) ($\forall$ م ∋ ≤) : $[هـ^{أ}]^{م} = هـ^{أم}$.

ملاحظة :

خواص الأسية تعمم خواص القوى إلى الأس الحقيقي وتكون هذه الدالة تشاكلا تقابليا من (ج، +) إلى ($ج^{*}_{+}$ ،×)

2 – 3 – الدراسة التحليلية للدالة الأسية ذات الأساس هـ :

2 – 3 – 1 – خواص مستنتجة من التعريف :

كدالة عكسية للدالة " لو "، الدالة الأسية معرفة، مستمرة ، قابلة للاشتقاق ومتزايدة تماما على ج.

2 – 3 – 2 – حساب المشتق :

لدينا : ($\forall$ س ∋ ج) ($\forall$ ع ∋ $ج^{*}_{+}$) ع = $هـ^{س}$ ⇔ س = لوع .

ومنه $(هـ^{س})' = \frac{1}{(لوع)'} = \frac{1}{\frac{1}{ع}} = ع = هـ^{س}$.

إذن : $\boxed{(هـ^{س})' = هـ^{س} .}$

2 – 3 – 3 – النهايات عند مالانهاية :

أ – النهاية عند ($-\infty$) :

$$\boxed{\lim_{س \to -\infty} هـ^{س} = 0}$$

البرهان :

ليكن $\alpha > 0$ كيفي فإنه يوجد أ > 0 بحيث س < أ ⇐ $هـ^{س} < \alpha$ لنضع أ = لوα ، س < أ

⇔ س < لوα وَ س < لوα ⇐ $هـ^{س} < هـ^{لو\alpha}$

يعني س < لو α ⇐ هـ^{س} < α   أي س < أ ⇐ هـ^{س} < α

ب - النهاية عند (+∞) :

$$\boxed{\lim_{س \to +\infty} هـ^{س} = +\infty}$$

البرهان : ليكن ب > 0 لنضع أ = لوب فيكون لدينا :

س > أ ⇔ س > لوأ وَ س > لو ب ⇐ هـ^{س} > هـ^{لوب}

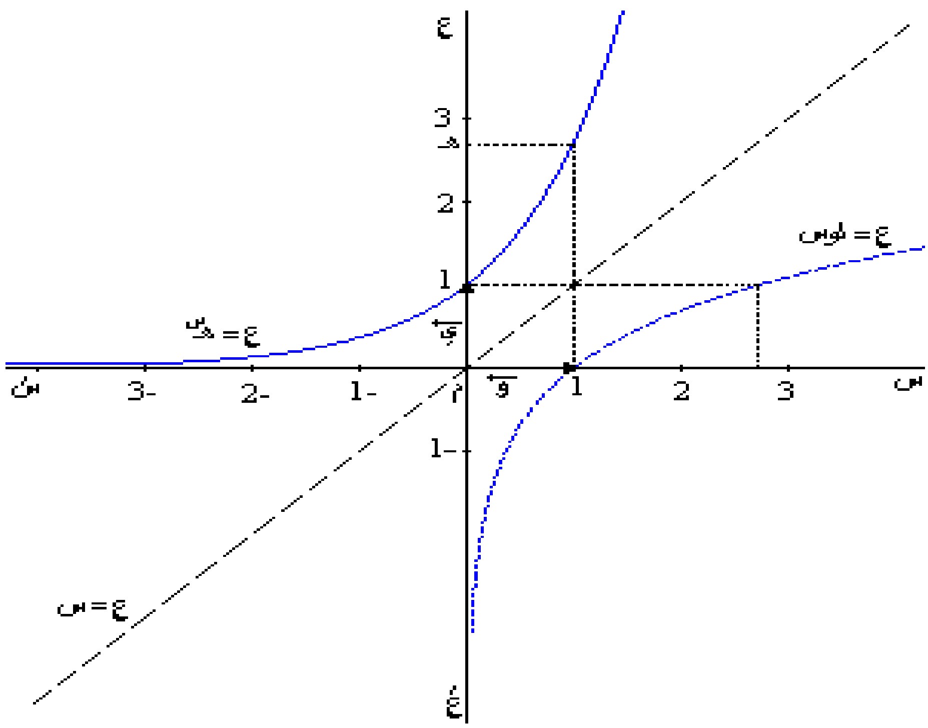
أي س > لوب ⇐ هـ^{س} > ب و منه س > أ ⇐ هـ^{س} > ب .

2 - 3 - 4 - تغيرات الدالة و تمثيلها :

تلخص النتائج السابقة في الجدول التالي :

س	−∞		0		1		+∞
(هـ^{س})'		+		+		+	
هـ^{س}	0	↗	1	↗	هـ	↗	+∞

التمثيل البياني للدالة الأسية :



2 – 3 – 5 – نتائج أخرى :

2 – 3 – 5 – 1 – نهاية $\frac{هـ^{س}-1}{س}$ عند 0 :

لنبرهن على النتيجة التالية :

$$\boxed{\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س}-1}{س} = 1}$$

حساب مشتق $هـ^{س}$ عند الصفر يعطينا :

2 – 3 – 5 – 2 – نهاية $\frac{هـ^{س}}{س}$ عند (+∞) :

$$\boxed{\lim_{س \to +\infty} \frac{هـ^{س}}{س} = +\infty}$$

البرهان :

لنضع ط = $هـ^{س}$ أي س = لوط .

لما س ← +∞ ، $هـ^{س}$ ← +∞ يعني ط ← +∞ ومنه

$$\lim_{س \to +\infty} \frac{هـ^{س}}{س} = \lim_{ط \to +\infty} \frac{ط}{لوط} = \lim_{ط \to +\infty} \frac{1}{\frac{لوط}{ط}} = +\infty \text{ . (لأن } \lim_{ط \to +\infty} \frac{ط}{لوط} = 0^{+} \text{)}$$

2 – 3 – 5 – 3 –

$$\boxed{\lim_{س \to -\infty} س هـ^{س} = 0}$$

البرهان :

لنضع س = –ط ، لما س ← –∞ ط ← +∞ ومنه

$$\lim_{س \to -\infty} س هـ^{س} = \lim_{ط \to +\infty} (-ط) هـ^{-ط} = \lim_{ط \to +\infty} \frac{-ط}{هـ^{ط}} = 0^{-} \text{ . (لأن } \lim_{ط \to +\infty} \frac{هـ^{ط}}{ط} = +\infty \text{)}$$

2 – 3 – 5 – 4 – مشتق الدالة المركبة س ← $هـ^{تا(س)}$:

نظرية :

إذا كانت تا قابلة للاشتقاق في مجال ل فإن الدالة المركبة س ↦ $هـ^{تا(س)}$ قابلة للاشتقاق في المجال ل ويكون لدينا : $[هـ^{تا(س)}]'$ = تاَ(س) × $هـ^{تا(س)}$

البرهان :

تطبيق مباشر لدستور اشتقاق دالة مركبة.

مثال : أحسب يَ(س) إذا كان : ي(س) = $هـ^{جب\ س}$

الحل : يَ(س) = (جب س)َ . $هـ^{جب\ س}$ = تجب س . $هـ^{جب\ س}$

2 – 3 – 5 – 5 – دستور تكامل آخر :

مما سبق نستنتج الدستور :

$\int$ تاَ(س) . $هـ^{تا(س)}$ تفاس = $هـ^{تا(س)}$ + ك (ك ∋ ح)

مثال :

$= \frac{1}{2} هـ^{س^2} + ك$

3 – الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس الكيفي :

3 – 1 – تعريف :

إذا كان أ عنصرًا من $ح_+^*$ –{1}. نسمي لوغارتم ذو الأساس أ الدالة التي نرمز لها لغأ والمعرفة كما يلي :∀ س ∋ $ح_+^*$: لغأ (س) = $\frac{لو\ س}{لو\ أ}$.

مثلا : $لغ_{10}$ (س) = $\frac{لو\ س}{لو\ 10}$ ، $لغ_2$ (س) = $\frac{لو\ س}{لو\ 2}$.

3 – 2 – الخواص الجبرية للدوال الوغارتمية :

نستنتج من التعريف أنه مهما كان أ في $ح_+^*$ –{1} .

ومهما كان س وَ ع في $ح_+^*$ وَ ن في ≤ فإن :

$لغ_ا (1) = 0$ وَ $لغ_ا (ا) = 1$

$لغ_ا (س.ع) = لغ_ا س + لغ_ا ع$ ، $لغ_ا (\frac{1}{ع}) = - لغ_ا ع$

$لغ_ا \frac{س}{ع} = لغ_ا س + لغ_ا ع$ ، $لغ_ا (س^{ن}) = ن\, لغ_ا س$.

3 - 3 - الدراسة التحليلية للدوال اللوغارتمية :

3 - 3 - 1 - الخاص الناتجة مباشرة من التعريف :

- مهما كان ا في $ح_+^*$ $-\{1\}$ فإن " لغ " دالة معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $ح_+^*$ (فهي من الشكل ك . لو).

- حساب المشتق : $[لغ_ا (س)]' = [\frac{لو س}{لو ا}]' = \frac{1}{لو ا}[لوس]' = \frac{1}{س\ لو ا}$.

ومنه : إذا كان ا > 1 فإن : لوا > 0 وَ $لغ_ا$ متزايدة تماما.

إذا كان 0 < ا < 1 فإن : لوا < 0 وَ $لغ_ا$ متناقصة تماما.

3 - 3 - 2 - النهايات :

بناء على نهايات "لو" وبما أن $لغ_ا س = \frac{لو س}{لو ا}$. نستنتج مباشرة ما يلي :

$$\lim_{س \to +\infty} لغ_ا (س) = \begin{cases} +\infty & \text{إذا كان ا} \rangle 1 \\ -\infty & \text{إذا كان } 0 \langle ا \langle 1 \end{cases}$$

$$\lim_{س \to 0^+} لغ_ا (س) = \begin{cases} -\infty & \text{إذا كان ا} \rangle 1 \\ +\infty & \text{إذا كان } 0 \langle ا \langle 1 \end{cases}$$

3 - 3 - 3 - جدول التغيرات وتمثيل الدوال اللوغارتمية :

نلخص تغيرات الدالة في الجدولين التاليين :

ا > 1

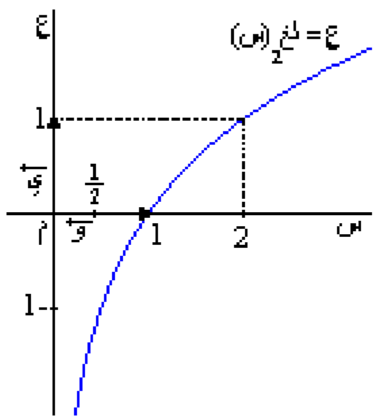
س	0	1	أ	$+\infty$
لغأ (س)	$-\infty$	0	1	$+\infty$

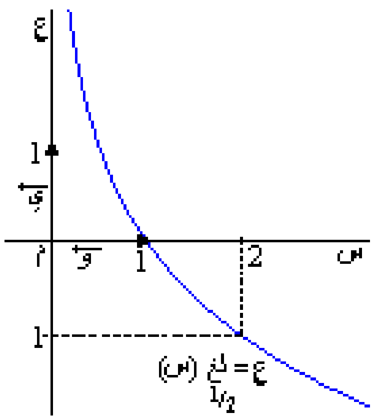
$0 < أ < 1$

س	0	أ	1	$+\infty$
لغأ (س)	$+\infty$	1	0	$-\infty$

ملاحظة : حسب ما سبق كل دالة " لغأ " تشاكل تقابلي من ($ح_+^*$ ، ×) إلى (ح، +).

التمثيلات البيانية للدالة اللغارتمية (أمثلة) :





3 – 3 – 4 – تغيير الأساس :

إذا كان أ وَ ب عددان من $ح_+^*$ −{1} وَ س ∋ $ح_+^*$.

لدينا : لغأ (س) = $\frac{\text{لو س}}{\text{لو أ}}$. لغب (س) = $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ب}}$.

ومنه : $لغ_ب (س) = لغ_م (س) \times \frac{لو ﺃ}{لو ب} = لغ_م (س) \times لغ_ب (ﺃ)$

3 – 3 – 5 – اللوغارتم العشري :

$لغ_{10} (س) = \frac{لو س}{لو 10}$ ، $لغ_{10} (10) = 1$.

لدينا الخاصة الأساسية للوغارتم العشري :

ن ∋ ط : $لو_{10} (10^{ن}) = ن لو_{10}(10) = ن$.

ومنه $لو_{10} (س \times 10^{ن}) = لو_{10}(س) + ن$.

4 – الدوال الأسية ذات الأساس الكيفي :

4 – 1 – تعريف و نتائج مباشرة :

4 – 1 – 1 – مقدمة :

لقد رأينا في الدرس السابق (3 . 3 .3) أن الدالة " $لغ_م$ " تقابل مهما كان الأساسﺃ. وكل تقابل يقبل دالة عكسية تقابلية ومنه لكل دالة $لغ_م$ دالة عكسية.

4 – 1 – 1 – تعريف :

نسمي دالة أسية ذات الأساس ﺃ (ﺃ ∋ $ح_+^* - \{1\}$ الدالة العكسية للدالة اللوغارتمية ذات الأساسﺃ ($لغ_م$) نرمز لها $أسية_م$.

إذن : (∀ س ∋ ح) (∀ ع ∋ $ح_+^*$) : ع = $أسية_م$ (س) ⇔ س = $لغ_م$ (ع) .

وَ $لغ_م$ [$أسية_م$(س)] = س وَ $أسية_م$ [$لغ_م$(ع)] = ع

4 – 1 – 2 – نتيجة :

" $أسية_م$ " تشاكل تقابلي من (ح ، +) إلى ($ح_+^*$ ، ×)

(راجع موضوع الدالة العكسية لتشاكل تقابلي).

منه : ∀ (س،ع) ∋ $ح^2$: $أسية_م$ (س+ع) = $أسية_م$ (س) × $أسية_م$ (ع)

وَ $\forall$ س $\ni$ ح : أسيـةم (س) > 0 .

4 – 1 – 3 – الـترميـز الـنـهـائـي :

لـنفس الأسبـاب الـتـي ذكرنـاهـا فيـمـا يـخـص الأسيـة الـنـبيـريـة نـضـع : **أسيـةم (س) = م^{س}**

لـكـن لـديـنـا : ع = أسيـةم (س) $\Leftrightarrow$ س = لـغم (ع) = $\frac{\text{لـو ع}}{\text{لـو م}}$.

وَ س = $\frac{\text{لـو ع}}{\text{لـو م}}$ $\Leftrightarrow$ س . و لـم = لـوع . أي : ع = هـ$^{\text{س.لـوم}}$

إذن :
$$\boxed{\text{أسيـةم (س)} = \text{هـ}^{\text{س.لـوم}} = \text{م}^{\text{س}}}$$

4 – 2 – الـخـواص الـجـبـريـة لِـ أسيـةم :

مـهـمـا كـان س وَ ع فـي ح وَ م فـي ح$_{+}^{*}$ $-\{1\}$.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{م}^{\text{س+ع}} = \text{م}^{\text{س}} \times \text{م}^{\text{ع}} & \text{م}^{-\text{س}} = \dfrac{1}{\text{م}^{\text{س}}} \\ \text{م}^{\text{س}-\text{ع}} = \dfrac{\text{م}^{\text{ع}}}{\text{م}^{\text{س}}} \;. & (\text{م}^{\text{س}})^{\text{ع}} = \text{م}^{\text{س.ع}} \end{array}}$$

الـبـرهـان :

فيـمـا يـخـص الـنتائـج الـثـلاث الأولـى يكفـي أن نـرجـع إلـى الـشـكـل : م^{س} = هـ$^{\text{س.لـوم}}$

أمـا الـنـتـيـجـة الأخيـرة فـنـضـع : ب = م^{س} يـكـون لـديـنـا :

$(\text{م}^{\text{س}})^{\text{ع}}$ = ب^{ع} =هـ$^{\text{ع لـوب}}$ مـع لـوب = لـو (م^{س}) = لـو (هـ$^{\text{س لـوم}}$) = س لـوم .

إذن : $(\text{م}^{\text{س}})^{\text{ع}}$ = هـ$^{\text{ع لـوب}}$ = هـ$^{\text{ع س لـوم}}$ = م$^{\text{س.ع}}$.

4 – 3 – الـدراسـة الـتـحـلـيـلـيـة لـلـدالـة س $\longmapsto$ م^{س} :

4 – 3 – 1 – الـنـهـايـات :

مـهـمـا كـان م فـي ح$_{+}^{*}$ $-\{1\}$ فـإن الـدالـة س $\longrightarrow$ م^{س} مـسـتـمـرة عـلـى ح لأنـهـا دالـة عكسيـة لـدالـة مستـمـرة ونـهـايـاتـهـا هـي :

$$\lim_{\text{س} \to +\infty} \text{أ}^{\text{س}} = \begin{cases} +\infty & \text{إذا كان } \text{أ} > 1 \\ 0 & \text{إذا كان } 0 < \text{أ} < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\text{س} \to -\infty} \text{أ}^{\text{س}} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } \text{أ} > 1 \\ +\infty & \text{إذا كان } 0 < \text{أ} < 1 \end{cases}$$

البرهان :

يكفي الرجوع إلى الشكل $\text{أ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{س لو أ}}$.

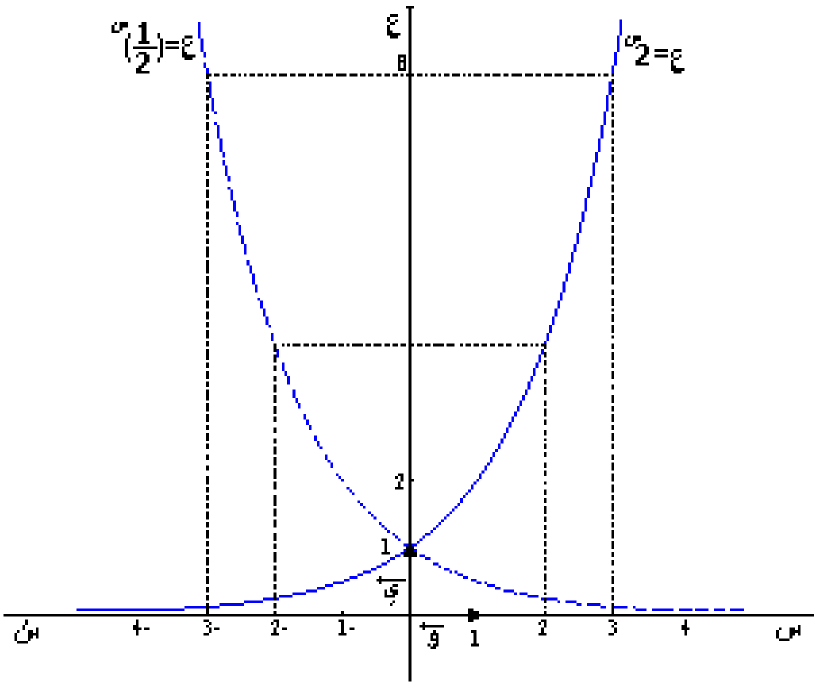
4 – 3 – 2 – تغيرات الدالة :

المشتق : $(\text{أ}^{\text{س}})' = (\text{هـ}^{\text{س لو أ}})' = \text{لو أ} \cdot \text{هـ}^{\text{س لو أ}} = \text{لو أ} \cdot \text{أ}^{\text{س}}$.

إذن اتجاه تغير الدالة حسب إشارة لو أ يعني حسب قيمة أ.

- إذا كان $\text{أ} > 1$. فإن الدالة متزايدة تماما.
- إذا كان $0 < \text{أ} < 1$ فإن الدالة متناقصة تماما.

– التمثيل البياني للدالتين $\text{س} \mapsto 2^{\text{س}}$ و $\text{س} \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{س}}$



5 – تمارين التصحيح الذاتي :

5 – 1 –عين مجموعة تعريف كل من الدالتين العدديتين : تا : $س \longmapsto لو\left[لو\left(لوس\right)\right]$ وَ

ها $س \leftarrow لو\left(\frac{1+س}{1-س}\right)$.

5 – 2 – حل في ح المعادلات أو جمل المعادلات التالية :

أ – $لو\,(س+3) + لو(س+2) = لو(س+11)$.

ب – $\begin{cases} لغ_{س}\,هـ + لغ_{ع}\,هـ = \frac{7}{3} \\ لو\,س\,ع = \frac{7}{2} \end{cases}$

جـ – $هـ^{س} - 2\,هـ^{-س} = 1$.

5 – 3 – عين النهايات التالية :

أ – $\lim\limits_{س \to +\infty} \left(س - لو\,س\right)$.

ب – $\lim\limits_{س \to 0^{+}} \frac{لو\left(1+اس\right)}{س}$ ، $ا \in ح^{*}$.

جـ – $\lim\limits_{س \to +\infty} \frac{هـ^{س}}{س^{2}}$.

5 – 4 – أحسب المشتقات التالية و التكاملات التالية : أ – $\left(س\,لوس\right)'$.

ب – $\left(لو\left|\frac{1+س}{1-س}\right|\right)'$.

جـ – $\left(هـ\,س^{2} - س\,هـ^{س+1} + 3\right)'$.

د – $\int \frac{س}{س^{2}+1}$ تفا س .

5 – 5 – أدرس الدالة : تا : $س \longmapsto س - لو\left|\frac{س+1}{س-1}\right|$.

وأرسم منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

6 - أجوبة التصحيح الذاتي :

6 - 1 - نعلم أن " لو " دالة معرفة على المجال] 0 ، +∞[

إذن لو [لو (لو س)] معرفة إذا كان لو (لو س)> 0

يعني إذا كان لو س> 1 أي إذا كان س> هـ.

إذن مجموعة تعريف الدالة تا هي : ف =] هـ ، +∞ [

لو$\left(\frac{1+س}{1-س}\right)$ معرفة إذا كان : $\frac{1+س}{1-س} \rangle 0$ وهذا محقق في المجال ف =] -1 ، + 1 [.

6 - 2 - أ) المعادلة : لو (س + 3) + لو (س + 2) = لو (س + 11)

لها معني إذا كان : س> - 3 وَ س > -2 وَ س > -11

يعني في المجال] - 2 ، +∞ [

إذا كان س ∍] - 2 ، +∞ [يكون لدينا :

لو (س+3) + لو (س+2) = لو (س+11)⇔لو(س+3) + لو (س+2) = لو (س+11) أي (س + 3) (س + 2) = س +11 (لأن "لو" دالة متباينة).

يعني $س^2+4س-5=0$ أي س = 1 أو س = - 5

لكن المعادلتان الأولى والأخيرة متكافئتين في المجال] -2 ، +∞ [فقط.

إذن الحل لوحيد هو : س = 1.

ب)الجملة: $\begin{cases} لغ_س^{هـ}+لغ_{هـ}^{ع}=\frac{7}{3} \\ لوس ع=\frac{7}{2} \end{cases}$ لها معنى إذا كان س وَع ينتميان إلى المجموعة $ح_+^*-\{1\}$

في هذه المجموعة يكون لدينا :

$$\begin{cases} لغ_س^{هـ}+لغ_{هـ}^{ع}=\frac{7}{3} \\ لوس ع=\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{لوهـ}{لوس}+\frac{لوهـ}{لوع}=\frac{7}{3} \\ لوس+لوع=\frac{7}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\text{لوس}} + \dfrac{1}{\text{لوع}} = \dfrac{7}{3} \\ \text{لوس} + \text{لوع} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$ لنضع أ = لو س وَ ب = لوع

فنحصل على الجملة : $\begin{cases} \dfrac{1}{\text{أ}} + \dfrac{1}{\text{ب}} = \dfrac{7}{3} \\ \text{أ} + \text{ب} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \dfrac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{أ ب}} = \dfrac{7}{3} & (1') \\ \text{أ}+\text{ب} = \dfrac{7}{2} & (2') \end{cases}$

من $(1')$ ينتج : $\dfrac{\text{أ}+\text{ب}}{7} = \dfrac{\text{أ ب}}{3}$ أي $\text{أ ب} = \dfrac{3 \times (\text{أ} + \text{ب})}{7} = \dfrac{7}{2} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{2}$.

أستخرج أ وَ ب علماً بأن أ + ب = $\dfrac{7}{2}$ وَ أن أ ب = $\dfrac{3}{2}$ يرجع إلى حل المعادلة :

$$\text{ص}^2 - \frac{7}{2}\text{ص} + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{أي} \quad 2\text{ص}^2 - 7\text{ص} + 3 = 0$$

لدينا : $\Delta = 25 = 5^2$

الحلان هما : $\text{ص}' = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$ وَ $\text{ص}'' = \dfrac{7+5}{4} = 3$

وحلا الجملة $\begin{cases} (1') \\ (2') \end{cases}$ هما : $(\text{أ} ، \text{ب}) = \left(\dfrac{1}{2} ، 3\right)$ وَ $(\text{أ} ، \text{ب}) = \left(3 ، \dfrac{1}{2}\right)$.

ومنه : * لو س $= \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \text{س} = \text{هـ}^{1/2} = \sqrt{\text{هـ}}$ وَ لو ع = 3 $\Leftrightarrow$ ع = هـ^3

أو * لو س = 3 وَ لو ع $= \dfrac{1}{2}$ يعني س = هـ^3 وَ ع = $\sqrt{\text{هـ}}$

القيمتان هـ^3 وَ $\sqrt{\text{هـ}}$ تنتميان إلى المجموعة $\text{ح}_+^* - \{1\}$

إذن مجموعة الحلول هي : $\left\{ \left(\text{هـ}^3 ، \sqrt{\text{هـ}}\right) ، \left(\sqrt{\text{هـ}} ، \text{هـ}^3\right) \right\}$

جـ) المعادلة $\text{هـ}^{\text{س}} - 2\text{هـ}^{-\text{س}} = 1$ معرفة من أجل كل س من ح

إذن $\text{هـ}^{\text{س}} - 2\text{هـ}^{-\text{س}} = 1 \Leftrightarrow \text{هـ}^{\text{س}} - \dfrac{2}{\text{هـ}^{\text{س}}} = 1 \Leftrightarrow \text{هـ}^{2\text{س}} - 2 = \text{هـ}^{\text{س}}$ (1)

بعد ضرب الطرفين في $\text{هـ}^{\text{س}}$.

(1) $\Leftrightarrow$ $هـ^{2س} - هـ^{س} - 2 = 0$ أي $(هـ^{س})^2 - هـ^{س} - 2 = 0$ $(1')$

إذا وضعنا : $ط = هـ^{س}$ فإن حل المعادلة $(1')$ يرجع إلى حل المعادلة $ط^2 - ط - 2 = 0$ التي تقبل الحلين : 2 وَ -2 وحيث $(ط > 0)$.

ومنه $هـ^{س} = 2 \Leftrightarrow س = لو 2$ وَ $هـ^{س} = -2$ مستحيلة لأن $هـ^{س} > 0$ يبقى الحل الوحيد للمعادلة هو : $س = لو 2$

6 - 3 - حساب النهايات :

أ) $\underset{س \to +\infty}{نها} (س - لو س)$ تظهر على الشكل غير المعين "$(\infty - \infty)$"

$$\underset{س \to +\infty}{نها} (س - لو س) = \underset{س \to +\infty}{نها} س \left(1 - \frac{لو س}{س}\right) = +\infty \quad (لأن \ \underset{س \to +\infty}{نها} \frac{لو س}{س} = 0)$$

ب - $\underset{س \to 0^+}{نها} \frac{لو(1 + ا س)}{س}$ تظهر على الشكل "$\frac{0}{0}$".

لنضع $ط = ا س$ أي $س = \frac{ط}{ا}$ $(ا \in ج^*)$

لما $س \to 0^+$ ، $ط \to 0^+$. ويكون لدينا :

$$\underset{س \to 0^+}{نها} \frac{لو(1 + ا س)}{س} = \underset{ط \to 0^+}{نها} \frac{لو(1 + ط)}{\frac{ط}{ا}} = \underset{ط \to 0^+}{نها} ا \frac{لو(1 + ط)}{ط} = ا$$

$$(لأن \ \underset{ط \to 0^+}{نها} \frac{لو(1 + ط)}{ط} = 1)$$

جـ - $\underset{س \to +\infty}{نها} \frac{هـ^{س}}{س^2}$ تظهر على الشكل "$\frac{\infty}{\infty}$" غير المعين.

لنضع $س = 2ط$ يكون لدينا :

$$\underset{س \to +\infty}{نها} \frac{هـ^{س}}{س^2} = \underset{ط \to +\infty}{نها} \frac{هـ^{2ط}}{(2ط)^2} = \underset{ط \to +\infty}{نها} \left(\frac{هـ^{ط}}{ط}\right)^2 = +\infty$$

لأن : $\underset{ط \to +\infty}{نها} \frac{هـ^{ط}}{ط} = +\infty$ (نهاية واردة في الدرس).

6 – 4 – حساب المشتقات والتكاملات :

أ) . $(\text{س} . \text{لو س})' = \text{س} . (\text{لو س})' + (\text{س})' \text{لوس} = \text{س} \left(\frac{1}{\text{س}}\right) + 1 . \text{لو س}$

ب) $\left(\text{لو}\left|\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right|\right)'$ يظهر على الشكل لو| تا| الذي يعطي المشتق $\frac{\text{تاَ}}{\text{تا}}$.

لدينا : $\left(\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right)' = \frac{-2}{(\text{س}-1)^2}$ ومنه :

$$\left(\text{لو}\left|\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right|\right)' = \frac{-2}{(\text{س}-1)^2} \times \frac{\text{س}-1}{\text{س}+1} = \frac{-2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \frac{-2}{\text{س}^2-1}$$

جـ . $\left(\text{هـ}^{\text{س}^2} - \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}+1} + 3\right)' = \left(\text{هـ}^{\text{س}^2}\right)' - \left(\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}+1}\right)'$.

$$= 2\text{س} . \text{هـ}^{\text{س}^2} - \left[\text{س}\left(\text{هـ}^{\text{س}+1}\right)' + 1 . \text{هـ}^{\text{س}+1}\right]$$

$$= 2\text{س} . \text{هـ}^{\text{س}^2} - \text{س} . \text{هـ}^{\text{س}+1} + \text{هـ}^{\text{س}+1}$$

$$= 2\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}^2} - \text{هـ}^{\text{س}+1}(\text{س}+1)$$

د . $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^2+1}$ تفا س التكامل من الشكل : $\int \frac{\text{تاَ}(\text{س})}{\text{تا}(\text{س})}$ تفا س

$$\int \frac{\text{س}}{\text{س}^2+1} \text{ تفا س} = \frac{1}{2}\int \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+1} \text{ تفا س} = \frac{1}{2}\int \frac{(\text{س}^2+1)'}{\text{س}^2+1} \text{ تفا س}$$

$$= \frac{1}{2} \text{لو}\left|\text{س}^2+1\right| + \text{ك} = \frac{1}{2} \text{لو}\left(\text{س}^2+1\right) + \text{ك} \text{، } (\text{ك} \in \text{ح}).$$

5 – 5 – دراسة الدالة تـ : $\text{س} \mapsto \text{س} - \text{لو}\left|\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right|$

أ) تا(س) معرفة إذا كان $\left|\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right| > 0$ أي إذا كان $\left|\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right| \neq 0$

يعني إذا كان : $\text{س} \neq 1$ وَ $\text{س} \neq -1$

إذن مجموعة التعريف هي :

ف =] −∞ ، −1 [∪] −1 ، +1 [∪] 1 ، +∞ [

وحسب خواص الدوال المركبة فإن تا مستمرة على كل مجال من ف

 الدالة تا فردية لأن : مهما كان س في ف (−س)∋ ف وَ :

$$\text{تا}(-\text{س}) = -\text{س} - \text{لو}\left|\frac{-\text{س}+1}{-\text{س}-1}\right| = -\text{س} - \text{لو}\left|\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\right| = -\text{س} + \text{لو}\left|\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right|$$

$$= -\left(\text{س} - \text{لو}\left|\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right|\right) = -\,\text{تا}(\text{س})$$

يمكن إذن أن نكتفي بدراسة الدالة تا في المجموعة :

فَ = [0 ، 1 [∪] +1 ، +∞ [.

ب) النهايات :

$$\lim_{\text{س}\to+\infty} \text{تا}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to+\infty}\left(\text{س} - \text{لو}\left|\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right|\right)$$

لما س ← +∞ ، $\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1} \to 1$ ، ومنه $\text{لو}\left|\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right| \to 0$

إذن $\lim_{\text{س}\to+\infty} \text{تا}(\text{س}) = +\infty$

* $\lim_{\text{س}\to+1} \text{تا}(\text{س})$

لما س ← +1 ، (س +1) ← 2 وَ (س −1) ← 0

إذن $\left|\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right| \to +\infty$ وَ $\text{لو}\left|\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right| \to +\infty$

ومنه $\lim_{\text{س}\to+1} \text{تا}(\text{س}) = -\infty$

جـ) اتجاه التغيرات :

 المشتق :

$$\text{تا}'(\text{س}) = 1 - \left(\frac{-2}{(\text{س}-1)^2} \times \frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\right) = 1 + \frac{2}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^2-1}$$

إشارة المشتق هي إشارة العبارة $\text{س}^2 - 1$ يعني :

تاَ (س) > 0 ⟺ س ∋] −∞ ، − 1 [∪] +1 ، +∞ [

تاَ (س) < 0 ⟺ س ∋]−1 ، +1 [

نستنتج من الدراسة السابقة جدول التغيرات التالي :

س	−∞		−1		0		+1		+∞
تاَ(س)		+	‖	−	⋮	−	‖	+	
تا	−∞	↗	+∞ ‖ +∞	↘	0	↘	−∞ ‖ −∞	↗	+∞

د) التمثيل البياني :

*نظراً إلى كون تا فردية ومنه كون المبدأ مركز تناظر لمنحني تا في المعلم $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$ المتعامد والمتجانس يكفي أن نعين بعض النقاط الواقعة في نصف المستوي المتعلق بالمجال [0 ، +∞ [.

تا(0) = 0 − لو $\left|\frac{1}{1}\right|$ = 0

تا$(\frac{1}{2})$ = $\frac{1}{2}$ − لو3 = 0,50 − 1,1 = −0,6

تا$(\frac{3}{4})$ = $\frac{3}{4}$ − لو7 = − 1,2

تا(2) = 2 − لو3 = 0,9

تا(3) = 3 − لو2 = 2,3

تا(4) = 4 − لو $\frac{5}{3}$ = 3.5

النهاية : نها$_{س \to +1}$ تا(س) = +∞ .

يعني أن المستقيم الذي معادلته س = 1 هو مستقيم مقارب لمنحني الدالة وهو كذلك بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته س = −1.

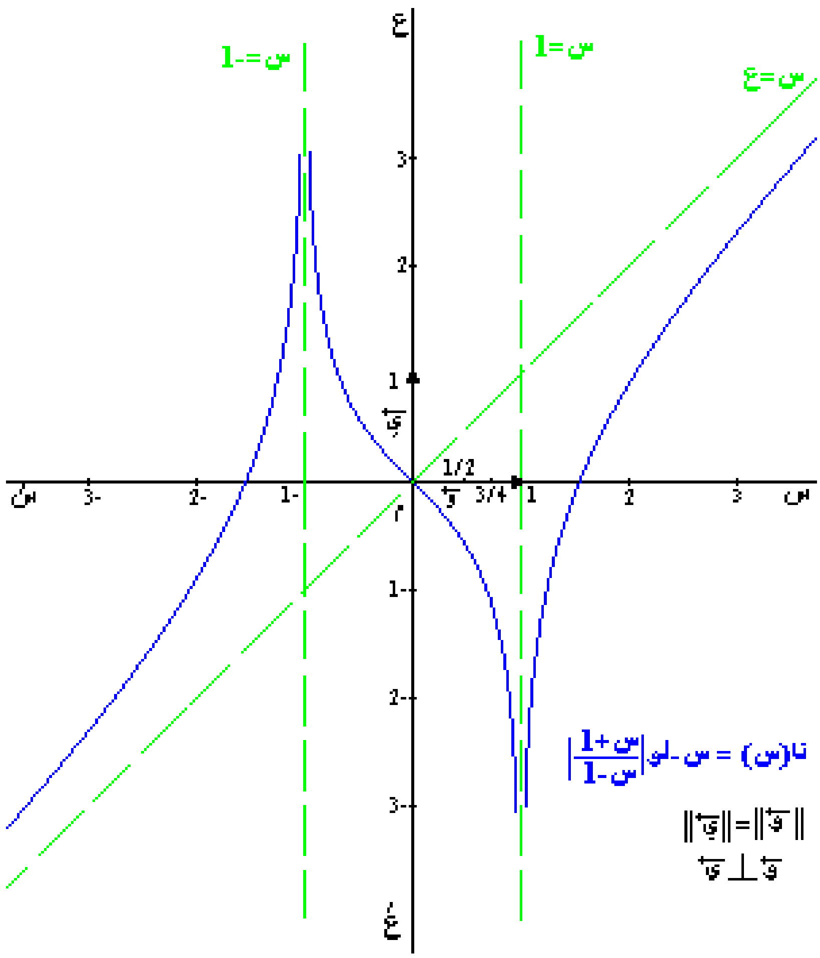
أما النهايتان : نها$_{س \to +\infty}$ تا(س) = +∞ وَ نها$_{س \to -\infty}$ تا(س) = −∞ فتشيران إلى إمكانية وجود مستقيم مقارب مائل.

لدينا : $\lim\limits_{س \to +\infty} \left[تا(س) - س \right] = \lim\limits_{س \to +\infty} \left[- لو \left| \frac{س + 1}{س - 1} \right| \right] = 0$

وَ $\lim\limits_{س \to -\infty} \left[تا(س) - س \right] = \lim\limits_{س \to -\infty} \left[- لو \left| \frac{س + 1}{س - 1} \right| \right] = 0$

وهاتان النهايتان تدلان على أن المستقيم الذي معادلته ع = س هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى البياني للدالة تا.

التمثيل البياني :



فهرس السلسلة 6

تتضمن هذه السلسلة درسا واحدا هو :

مركز المسافات المتناسبة

مركـز المـسـافـات المـتـنـاسبـة

الأهـداف مـن الـدرس : *تـوسـيـع مـفـهـوم مـركـز الـثـقـل الـذي سـبـقـت دراسـتـه فـي حالات محدودة (نقـطـتـيـن أو ثـلاثـة)

*التعرف على أداة هندسية جديدة يمكن استغلالها في مسائل هندسية مختلفة.

*تزويد الطالب بأداة رياضية أساسية لدراساته العليا في علم الميكانيك.

* تـمـرن الـطـالـب عـلـى اسـتـغـلال مـركـز المـسـافـات المـتـنـاسـبـة لـتـعـيـيـن بـعـض المـجـمـوعـات النـقطـية المعـرفة بـخـاصـة مميـزة تـدخـل فيـهـا المـسـافـات.

المـدة الـلازمـة لـدراسـتـه : 6 ساعـات

الدروس الـتـي يـنـبـغـي مـراجـعـتـهـا : الأشـعـة، الـجـداء الـسـلـمـي، تـقـسـيم قـطـعـة بـنـسـبـة مـعـلـومـة.

المـراجـع الـخـاصـة بـهـذا الـدرس : الكـتـاب الـمـدرسـي لأقـسـام : الـسـنـة الأولـى ثـانـوي (مـركـز المسافات المتنـاسبـة)

الـسـنـة الـثـانـيـة ثـانـوي(الـجـداء الـسـلـمـي)

الـسـنـة الـثـالـثـة ثـانـوي /ع + ر المعـهـد التـربـوي الـوطـنـي.

تـصـمـيـم الـدرس

تـمـهـيـد

1 - تـعـريـف مـركـز الـمـسـافـات الـمـتـنـاسـبـة

2 - طـريـقـة إنـشـاء مـركـز الـمـسـافـات الـمـتـنـاسـبـة

3 - تـطـبـيـق

4 - تـمـاريـن الـتـصـحـيـح الـذاتـي

5 - الأجـوبـة

تمهيد :

رأيت أيها الطالب في السنوات الماضية دور منتصف قطعة مستقيمة أو مركز دائرة في حل بعض المسائل الهندسية المتعلقة بهاتين المجموعتين النقطيتين كما رأيت كذلك دور مركز الثقل في التوازن في علم الميكانيك، وحتى مركز المسافتين المتناسبتين في توازن كتلتين مختلفتين.

كل هذه المسائل ومسائل أخرى تعالج بواسطة مفهوم أساسي وهو مركز المسافات المتناسبة لجملة من النقاط مرفوقة بمعاملات. سنوسع في هذه الفقرة دراسة هذا المفهوم من نقطتين أو ثلاثة إلى عدة نقاط وسنرى تطبيقات هندسية مختلفة لهذا المفهوم.

1 – تعريف مركز المسافات المتناسبة

1 – 1 – دراسة الدالة الشعاعية لليبنيز :

لتكن أ_1، أ_2، ......، $\text{أ}_{\text{ك}}$. ك نقطة من الفضاء (ف) وَ α_1، α_2، ......، $\alpha_{\text{ك}}$ ك عددا حقيقياً، نسمي مجموعة الأزواج $(\text{أ}_{\text{ر}} ، \alpha_{\text{ر}})$، $1 \le \text{ر} \le \text{ك}$ جملة من النقاط ونقول عن النقاط أ_1، أ_2، .....$\text{أ}_{\text{ك}}$ أنها مرفوقة بالمعاملات : α_1، α_2، .....، $\alpha_{\text{ك}}$ على الترتيب.لتكن $\overleftarrow{\text{ش}}$ مجموعة أشعة الفضاء وَ تا : (ف) ← $\overleftarrow{\text{ش}}$ الدالة الشعاعية المعرفة كما يلي :

$$\forall \text{ن} \in (\text{ف}) : \overleftarrow{\text{تا}}(\text{ن}) = \alpha_1 . \overleftarrow{\text{ن أ}_1} + \alpha_2 . \overleftarrow{\text{ن أ}_2} + ... + \alpha_{\text{ك}} . \overleftarrow{\text{ن أ}_{\text{ك}}}$$

إذا كانت نَ نقطة كيفية تختلف عن ن يكون لدينا :

$$\overleftarrow{\text{تا}}(\text{نَ}) = \alpha_1 . \overleftarrow{\text{نَ أ}_1} + \alpha_2 . \overleftarrow{\text{نَ أ}_2} + ... + \alpha_{\text{ك}} . \overleftarrow{\text{نَ أ}_{\text{ك}}}$$

ومنه :

$$\overleftarrow{\text{تا}}(\text{ن}) - \overleftarrow{\text{تا}}(\text{نَ}) = \alpha_1 . \left(\overleftarrow{\text{ن أ}_1} - \overleftarrow{\text{نَ أ}_1}\right) + \alpha_2 . \left(\overleftarrow{\text{ن أ}_2} - \overleftarrow{\text{نَ أ}_2}\right) + ... + \alpha_{\text{ك}} . \left(\overleftarrow{\text{ن أ}_{\text{ك}}} - \overleftarrow{\text{نَ أ}_2}\right)$$

$$\overleftarrow{\text{تا}}(\text{ن}) - \overleftarrow{\text{تا}}(\text{نَ}) = \alpha_1 . \overleftarrow{\text{ن نَ}} + \alpha_2 . \overleftarrow{\text{ن نَ}} + ... + \alpha_{\text{ك}} . \overleftarrow{\text{ن نَ}}$$

$$\overleftarrow{\text{تا}}(\text{ن}) - \overleftarrow{\text{تا}}(\text{نَ}) = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{\text{ك}}\right) . \overleftarrow{\text{ن نَ}}$$

*إذا كان : $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{\text{ك}} = 0$

فإن $\overleftarrow{تا}(ن) - \overleftarrow{تا}(نَ)$ يبقى معدوماً مهما كانت ن ونَ وهذا يعني أن الشعاع $\overleftarrow{تا}(ن)$ ثابت ومستقل عن النقطة ن.

*إذا كان : $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك \neq 0$

فإن : $\overleftarrow{تا}(ن) \neq \overleftarrow{تا}(نَ)$

وهذا يعني أن الدالة تا متباينة وأن الشعاع $\overleftarrow{تا}(ن)$ متعلق بالنقطة ن. فهل توجد في هذه الحالة نقطة هـ بحيث : $\overleftarrow{تا}(هـ) = \overleftarrow{0}$ ؟

لتكن م نقطة ثابتة فيكون لدينا :

$$\overleftarrow{تا}(هـ) = \overleftarrow{0} \Leftrightarrow \alpha_1 . \overleftarrow{هـ أ_1} + \alpha_2 . \overleftarrow{هـ أ_2} + ... + \alpha_ك \overleftarrow{هـ أ_ك} = \overleftarrow{0}$$

$$\overleftarrow{تا}(هـ) = \overleftarrow{0} \Leftrightarrow \alpha_1 \left(\overleftarrow{م أ_1} - \overleftarrow{م هـ}\right) + \alpha_2 \left(\overleftarrow{م أ_2} - \overleftarrow{م هـ}\right) + ... + \alpha_ك \left(\overleftarrow{م أ_ك} - \overleftarrow{م هـ}\right) = \overleftarrow{0}$$

$$\overleftarrow{تا}(هـ) = \overleftarrow{0} \Leftrightarrow \alpha_1 . \overleftarrow{م أ_1} + \alpha_2 . \overleftarrow{م أ_2} + ... + \alpha_ك \overleftarrow{م أ_ك} - \left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك\right) . \overleftarrow{م هـ} = \overleftarrow{0}$$

$$\overleftarrow{تا}(هـ) = \overleftarrow{0} \Leftrightarrow \alpha_1 . \overleftarrow{م أ_1} + \alpha_2 . \overleftarrow{م أ_2} + ... + \alpha_ك \overleftarrow{م أ_ك} = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك\right) . \overleftarrow{م هـ}$$

أي:

$$\overleftarrow{تا}(هـ) = \overleftarrow{0} \Leftrightarrow \overleftarrow{م هـ} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك} \left[\alpha_1 . \overleftarrow{م أ_1} + \alpha_2 . \overleftarrow{م أ_2} + ... + \alpha_ك \overleftarrow{م أ_ك}\right]$$

* **نتيجة** :

إذا كانت $أ_1$ ، $أ_2$ ، ..... $أ_ك$ ك نقطة مرفوقة بالأعداد α_1 ، α_2 ، ..... $\alpha_ك$ على الترتيب بحيث $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك \neq 0$ فإنه توجد نقطة هـ وحيدة بحيث :

$$\alpha_1 . \overleftarrow{هـ أ_1} + \alpha_2 . \overleftarrow{هـ أ_2} + ... + \alpha_ك \overleftarrow{هـ أ_ك} = \overleftarrow{0}$$

وهي النقطة المعرفة بالمساواة :

$$\overleftarrow{م هـ} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك} \left[\alpha_1 . \overleftarrow{م أ_1} + \alpha_2 . \overleftarrow{م أ_2} + ... + \alpha_ك \overleftarrow{م أ_ك}\right]$$

حيث م نقطة كيفية مأخوذة كمبدأ

1 – 2 – تعريف مركز المسافات المتناسبة لجملة من النقط :

> $\left(أ_1 , \alpha_1\right)$ ، $\left(أ_2 , \alpha_2\right)$ ، ..... $\left(أ_ك , \alpha_ك\right)$ جملة من النقاط حيث : $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك \neq 0$.
>
> نسمي مركز المسافات المتناسبة لهذه الجملة النقطة الوحيدة هـ التي تحقق :
>
> $$\alpha_1 \cdot \overleftarrow{هـ أ_1} + \alpha_2 \cdot \overleftarrow{هـ أ_2} + ... + \alpha_ك \overleftarrow{هـ أ_ك} = \overleftarrow{0}$$

1 – 3 – إحداثيات مركز المسافات المتناسبة :

$\left(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي} ، \overleftarrow{ك}\right)$ معلم كيفي للفضاء (ف)، $\left(أ_1 , \alpha_1\right)$ ، $\left(أ_2 , \alpha_2\right)$ ، ..... $\left(أ_ك , \alpha_ك\right)$ جملة من النقاط في (ف) إحداثياتها على التوالي :

$\left(س_1 ، ع_1 ، ص_1\right)$، $\left(س_2 ، ع_2 ، ص_2\right)$، .....، $\left(س_ك ، ع_ك ، ص_ك\right)$ وَ هـ مركز المسافات المتناسبة لهذه الجملة حيث إحداثياتها (س ، ع ، ص).

فمن العلاقة : $\overleftarrow{م هـ} = \dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك}\left[\alpha_1 \cdot \overleftarrow{م أ_1} + \alpha_2 \cdot \overleftarrow{م أ_2} + ... + \alpha_ك \overleftarrow{م أ_ك}\right]$

نستنتج مباشرة : $س = \dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك}\left[\alpha_1 \cdot س_1 + \alpha_2 \cdot س_2 + ... + \alpha_ك س_ك\right]$

أي :

$$\boxed{\begin{aligned} س &= \frac{\alpha_1 \cdot س_1 + \alpha_2 \cdot س_2 + ... + \alpha_ك س_ك}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك} \\ ع &= \frac{\alpha_1 \cdot ع_1 + \alpha_2 \cdot ع_2 + ... + \alpha_ك ع_ك}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك} \\ ص &= \frac{\alpha_1 ص_1 + \alpha_2 ص_2 + ... + \alpha_ك ص_ك}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك} \end{aligned}}$$

1 – 4 – خواص مركز المسافات المتناسبة :

1 – 4 – 1 – نظرية :

> لا يتغير مركز المسافات المتناسبة لجملة من النقاط إذا استبدلنا جزءاً من هذه الجملة بمركزه الجزئي مرفوقاً بمجموع معاملات النقاط المستبدلة.

البرهان :

لتكن : $\text{أ}_1(\alpha_1)$، $\text{أ}_2(\alpha_2)$، ....، $\text{أ}_{\text{ك}}(\alpha_{\text{ك}})$. جملة من النقاط، هـ مركزها للمسافات المتناسبة، ل عدد طبيعي حيث 1 < ل < ك. نريد مثلا استبدال ل نقطة من الجملة.

نفرض أنها ل النقاط الأولى (وإلا يمكن تغيير الترتيب) ، ليكن هـَ مركز الجملة :

$\text{أ}_1(\alpha_1)$، ....، $\text{أ}_{\text{ل}}(\alpha_{\text{ل}})$ (نفرض طبعاً أن $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{\text{ل}} \neq 0$ وإلا لا يوجد المركز) وَ م مبدأ.

لدينا : $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{\text{ل}})\overleftarrow{\text{مهـَ}} = \alpha_1 \overleftarrow{\text{مأ}_1} + \alpha_2 \overleftarrow{\text{مأ}_2} + ... + \alpha_{\text{ل}} \overleftarrow{\text{مأ}_{\text{ل}}}$

إذا كان هـً مركز المسافات المتناسبة للجملة :

$\text{هـَ}(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{\text{ل}})$ ، $\text{أ}_{\text{ل}+1}(\alpha_{\text{ل}+1})$، ....، $\text{أ}_{\text{ك}}(\alpha_{\text{ك}})$.

يكون لدينا :

$(\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_{\text{ل}}+....+\alpha_{\text{ك}})\overleftarrow{\text{مهـً}} = (\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_{\text{ل}})\overleftarrow{\text{مهـَ}}+\alpha_{\text{ل}+1}\overleftarrow{\text{مأ}_{\text{ل}+1}}+....+\alpha_{\text{ك}}\overleftarrow{\text{مأ}_{\text{ك}}}$ وإذا عوضنا $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{\text{ل}})\overleftarrow{\text{مهـَ}}$ حسب المساواة السابقة ينتج :

$(\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_{\text{ل}})\overleftarrow{\text{مهـً}} = \alpha_1\overleftarrow{\text{مأ}_1}+\alpha_2\overleftarrow{\text{مأ}_2}+....+\alpha_{\text{ل}}\overleftarrow{\text{مأ}_{\text{ل}}}+\alpha_{\text{ل}+1}\overleftarrow{\text{مأ}_{\text{ل}+1}}+....+\alpha_{\text{ك}}\overleftarrow{\text{مأ}_{\text{ك}}}$ وهذه المساواة تعرف مركز المسافات المتناسبة

هـ الذي هو وحيد إذن هـً = هـ (ارجع إلى النتيجة 1.1).

1 – 4 – 2 – نظرية :

لا يتغير مركز المسافات المتناسبة لجملة من النقاط إذا ضربنا كل المعاملات في نفس العدد الحقيقي غير معدوم.

البرهان :

ليكن هـ مركز المسافات المتناسبة للجملة $\text{أ}_1(\alpha_1)$، $\text{أ}_2(\alpha_2)$، ....، $\text{أ}_{\text{ك}}(\alpha_{\text{ك}})$ وهـَ مركز المسافات المتناسبة للجملة :

$\text{أ}_1(\text{ط}\,\alpha_1)$، $\text{أ}_2(\text{ط}\,\alpha_2)$، ....، $\text{أ}_{\text{ك}}(\text{ط}\,\alpha_{\text{ك}})$ حيث ط عدد حقيقي غير معدوم.

لدينا : $\overleftarrow{\text{مهـَ}} = \frac{1}{\text{ط}\alpha_1+\text{ط}\alpha_2+....+\text{ط}\alpha_{\text{ك}}}\left[\text{ط}\alpha_1\overleftarrow{\text{مأ}_1}+\text{ط}\alpha_2\overleftarrow{\text{مأ}_2}+....+\text{ط}\alpha_{\text{ك}}\overleftarrow{\text{مأ}_{\text{ك}}}\right]$

أي $\overrightarrow{م هـَ} = \frac{1}{ط\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك\right)} \left[ط\left(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{م أ_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{م أ_2} + ... + \alpha_ك \overrightarrow{م أ_ك} \right) \right]$

أي $\overrightarrow{م هـَ} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك} \left[\alpha_1 \cdot \overrightarrow{م أ_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{م أ_2} + ... + \alpha_ك \overrightarrow{م أ_ك} \right]$

وهذا تعريف هـ مركز المسافات المتناسبة للجملة : $أ_1 \left(\alpha_1\right)$ ، $أ_2 \left(\alpha_2\right)$ ، ..... ، $أ_ك \left(\alpha_ك\right)$ إذن هـَ = هـ.

1 – 5 – مركز الثقل لجملة من النقاط :

1 – 5 –1 تعريف : يسمى مركز المسافات المتناسبة لجملة من النقاط مركز ثقل إذا كانت كل المعاملات متساوية.

1 – 5 – 2 ملاحظات :

1 – إذا كان $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_ك = \alpha$ يتحول الشرط $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_ك \neq 0$ إلى ك $\alpha \neq 0$ أي $\alpha \neq 0$ وهذا يعني أن مركز الثقل معرف بالنسبة لكل جملة ما عدا الجملة التي فيها كل المعاملات معدومة.

2 – حسب ما سبق وحسب النظرية (1 – 4 – 2) يمكن ضرب كل المعاملات في $\frac{1}{\alpha}$

ويُعرّف حينئذ مركز الثقل هـ بالمساواة :

$$\boxed{\overrightarrow{هـ أ_1} + \overrightarrow{هـ أ_2} + ... + \overrightarrow{هـ أ_ك} = \vec{0}}$$

أو المساواة :

$$\boxed{\overrightarrow{م هـَ} = \frac{1}{ك}\left[\overrightarrow{م أ_1} + \overrightarrow{م أ_2} + ... + \overrightarrow{م أ_ك}\right]}$$

إذن يمكن إعتبار مركز ثقل عدة نقاط كمركز المسافات المتناسبة لهذه النقاط كل منها مرفوقة بالمعامل 1.

1 – 5 – 3 – إحداثيات مركز الثقل :

الدساتير الخاصة بإحداثيات مركز المسافات المتناسبة تتبسط إلى :

$$س = \frac{س_1 + س_2 + ... + س_ك}{ك}$$

$$ع = \frac{ع_1 + ع_2 + ... + ع_ك}{ك}$$

$$ص = \frac{ص_1 + ص_2 + ... + ص_ك}{ك}$$

2 – طريقة إنشاء مركز المسافات المتناسبة :

2 – 1 إنشاء مركز الثقل :

2 – 1 – 1 – مركز ثقل نقطتين :

إذا كانت أ وَ ب نقطتان متمايزتان وَ هـ مركز ثقلهما فيكون لدينا :

$\overrightarrow{\text{هـ أ}} + \overrightarrow{\text{هـ ب}} = \vec{0}$ أي $\overrightarrow{\text{هـ ب}} = -\overrightarrow{\text{هـ أ}}$

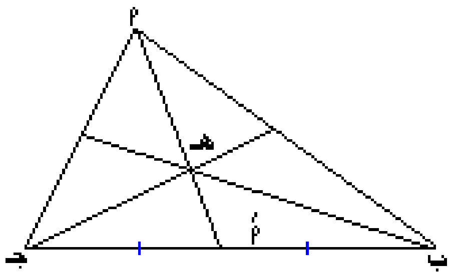
ومنه هـ منتصف القطعة [أ ب]

2 – 1 – 2 – مركز ثقل ثلاث نقاط أ ، ب ، جـ :

مركز الثقل هـ يحقق : $\overrightarrow{\text{هـ أ}} + \overrightarrow{\text{هـ ب}} + \overrightarrow{\text{هـ جـ}} = \vec{0}$.

وإذا عوضنا الجملة ب (1) ، جـ (1) بمركز الثقل لهما وليكن أ' (منتصف [ب جـ]) مرفوق بالمعامل 2 فيكون لدينا :

$\overrightarrow{\text{هـ أ}} + 2\overrightarrow{\text{هـ أ'}} = \vec{0}$

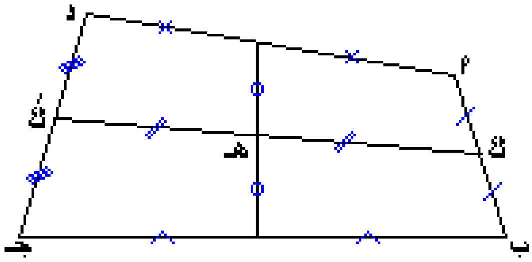


ومنه هـ نقطة من المستقيم (أأ') تحقق $\overrightarrow{\text{هـ أ}} + 2\overrightarrow{\text{هـ أ'}} = 0$ يعني : $\frac{\overline{\text{هـ أ}}}{\overline{\text{هـ أ'}}} = -2$.

هـ هي النقطة الواقعة على ثلثي القطعة[أأ'] إبتداء من أ وهي نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث (إذا كانت النقاط الثلاثة ليست على استقامة واحدة)

2 - 1 - 3 - مركز ثقل أربع نقاط :

نعوض النقاط أ وَ ب بمنتصف القطعة [أ ب] مرفوق بالمعامل 2 والنقطتين جـ ، د بمنتصف [جـ د] مرفوق بالمعامل 2. وَهو هـ منتصف القطعة [كَ ك].



يبين الشكل طريقة إنشاء مركز الثقل لأربع نقاط في المستوي لكن الطريقة تبقى صحيحة في حالة أربع نقاط ليست من نفس المستوي.

2 - 2 - إنشاء مركز المسافات المتناسبة :

2 - 2 - 1 - مركز المسافات المتناسبة لنقطتين :

لتكن أ (α) وَ ب (β) جملة نقطتين حيث $\alpha + \beta \neq 0$.

وَ هـ مركزهما للمسافات المتناسبة لدينا :

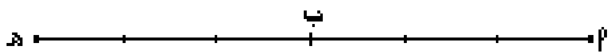
$$\alpha.\overrightarrow{\text{هـ أ}} + \beta.\overrightarrow{\text{هـ ب}} = \vec{0} \quad \text{أي} \quad \alpha.\overrightarrow{\text{هـ أ}} = -\beta.\overrightarrow{\text{هـ ب}}$$

من الواضح أن هـ على إستقامة واحدة مع أ وَ ب ومنه :

$$\alpha.\overrightarrow{\text{هـ أ}} = -\beta.\overrightarrow{\text{هـ ب}} \Leftrightarrow \alpha.\overline{\text{هـ أ}} = -\beta.\overline{\text{هـ ب}}$$

أي $\dfrac{\overline{\text{هـ أ}}}{\overline{\text{هـ ب}}} = \dfrac{-\beta}{\alpha}$. هـ تقسم الثنائية (أ ، ب) بنسبة $-\dfrac{\beta}{\alpha}$

مثال : أ (2) ، ب (−5)



$$\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ ب}} = \frac{5}{2}$$

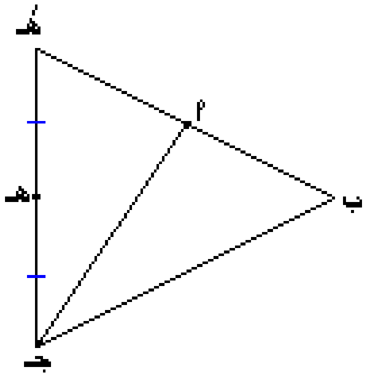
2 - 2 - 2 مركز المسافات المتناسبة لثلاث نقاط أو أكثر :

نبحث عن مركز المسافات المتناسبة للنقطتين الأوليتين ونعوض النقطتين بمركزهما مرفوق بمجموع المعاملين وهكذا بتكرار العملية يتناقص عدد النقاط حتى يصل إلى 2 أي حتى نصل إلى الحالة السابقة.

مثـال : أ(2) ، ب (−1) ، جـ (+1).

ليكـن هـَ مركـز المسـافات المتناسبة لـ أ(2) ، ب (−1) وهـو النقطة التي تقسم الثنائية (أ ، ب) بنسبة $\frac{1}{2}$ ومنه مركز المسافات المتناسبة للجملة أ(2) ، ب (−1) ، جـ (+1) هـو مركـز المسافات المتناسبة للجملة : هـَ (+1)، جـ(1) أي منتصف القطعة [هـَ جـ].

(أنظر الشكل)



3 – تطبيق : دراسة مجموعة النقاط ن حيث : $\alpha\,.\,\text{نأ}^2+\beta\,.\,\text{نب}^2+\gamma\,\text{نجـ}^2=\text{ك}$

3 – 1 – تحويل العبارة : $\alpha\,.\,\text{نأ}^2+\beta\,.\,\text{نب}^2+\gamma\,\text{نجـ}^2$

لتكن أ ، ب ، جـ ، ن أربع نقاط من الفضاء وَ α ، β ، γ ثلاث أعداد حقيقية كيفية.

لتكن م نقطة كيفية أخرى من الفضاء.

لدينا : $\overrightarrow{\text{نأ}}=\overrightarrow{\text{نم}}+\overrightarrow{\text{مأ}}$ ، $\overrightarrow{\text{نب}}=\overrightarrow{\text{نم}}+\overrightarrow{\text{مب}}$ ، $\overrightarrow{\text{نجـ}}=\overrightarrow{\text{نم}}+\overrightarrow{\text{مجـ}}$.

ومنه : $\text{نأ}^2=\text{نم}^2+\text{مأ}^2+2\overrightarrow{\text{نم}}\,.\,\overrightarrow{\text{مأ}}=\text{نم}^2+\text{مأ}^2-2\overrightarrow{\text{من}}\,.\,\overrightarrow{\text{مأ}}$

$$\text{نب}^2=\text{نم}^2+\text{مب}^2-2\overrightarrow{\text{من}}\,.\,\overrightarrow{\text{مب}}$$

$$\text{نجـ}^2=\text{نم}^2+\text{مجـ}^2-2\overrightarrow{\text{من}}\,.\,\overrightarrow{\text{مجـ}}$$

أي : $\alpha\;\text{نأ}^2+\beta\,.\,\text{نب}^2+\gamma\,\text{نجـ}^2=(\alpha+\beta+\gamma)\text{نم}^2+\alpha\;\text{مأ}^2+\beta\,.\,\text{مب}^2+\gamma\,\text{مجـ}^2-2\overrightarrow{\text{من}}\,.\left(\alpha\;\overrightarrow{\text{مأ}}+\beta\,.\,\overrightarrow{\text{مب}}+\gamma\,\overrightarrow{\text{مجـ}}\right)$

3 – 2 – دراسة الحالة الأولى : $\alpha+\beta+\gamma=0$:

لتكن مج مجموعة النقاط ن حيث : $\alpha\;\text{نأ}^2+\beta\,.\,\text{ن ب}^2+\gamma\,\text{ن جـ}^2=\text{ك}$

(ك عدد حقيقي)

إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$. المساواة السابقة تصبح :

$\alpha\;\text{نأ}^2+\beta\,.\,\text{نب}^2+\gamma\,\text{نجـ}^2=\alpha\;\text{مأ}^2+\beta\,.\,\text{مب}^2+\gamma\,\text{مجـ}^2-2\overrightarrow{\text{من}}\left(\alpha\;\overrightarrow{\text{مأ}}+\beta\,.\,\overrightarrow{\text{مب}}+\gamma\,\overrightarrow{\text{مجـ}}\right)$ نعلم أنه لما $\alpha+\beta+\gamma=0$ يكون الشعاع : $\alpha\;\overrightarrow{\text{مأ}}+\beta\,.\,\overrightarrow{\text{مب}}+\gamma\,\overrightarrow{\text{مجـ}}$ ثابتاً.

(أرجع إلى 1.1) لنسميه $\overrightarrow{\text{شَ}}$.

إذن : α نأ^2 $+\beta$.نب^2 $+\gamma$ نجـ^2 $=\alpha$ مأ^2 $+\beta$.مب^2 $+\gamma$ مجـ^2 -2 $\overrightarrow{\text{من}}$. $\overrightarrow{\text{ش}}$

ومنه α مأ^2 $+\beta$.مب^2 $+\gamma$ مجـ^2 -2 $\overrightarrow{\text{من}}$. $\overrightarrow{\text{ش}}$ = ك .

أي : $\overrightarrow{\text{من}}$. $\overrightarrow{\text{ش}}$ $=\frac{1}{2}\Big[\alpha$ مأ^2 $+\beta$.مب^2 $+\gamma$ مجـ^2 $-$ ك$\Big]$ = ل

تـؤول المسـألـة إلـى البحـث علـى مجموعـة النقـاط ن التـي تحقـق : $\overrightarrow{\text{من}}$. $\overrightarrow{\text{ش}}$ = ل حيث ل عدد حقيقي كيفـي وَ $\overrightarrow{\text{ش}}$ شعـاع معدوم معلـوم.

لتكن النقطـة ي حيث : $\overrightarrow{\text{مي}}$ = $\overrightarrow{\text{ش}}$ وَ د المسقط العمودي لِـ ن على (م ي)

فيكـون : $\overrightarrow{\text{من}}$. $\overrightarrow{\text{ش}}$ = $\overrightarrow{\text{من}}$. $\overrightarrow{\text{مي}}$ = $\overrightarrow{\text{مد}}$. $\overrightarrow{\text{مي}}$ = ل

هـذا معنـاه أن النقطـة د ثابتـة ومنـه مجموعـة النقـاط ن هـي المستـوي (π) الـذي يعـامد (م ي) فـي النقطـة د.

3 – 3 – الحالـة الثانيـة : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

ليكن هـ مركـز المسـافات المتنـاسبة للجملـة :أ (α) وَ ب (β) ، جـ (γ).

بتعويض م بِـ هـ فـي المسـاواة المفروضـة فـإن :

α نأ^2 $+\beta$.نب^2 $+\gamma$ نجـ^2 $=(\alpha+\beta+\gamma)$ نم^2 $+\alpha$. مأ^2 $+\beta$.مب^2 $+\gamma$.مجـ^2

-2 من^2 $+\big(\alpha$. $\overrightarrow{\text{مأ}}$ $-\beta$. $\overrightarrow{\text{مب}}$ $+\gamma$. $\overrightarrow{\text{مجـ}}\big)$

نتحصل علـى المسـاواة :

α نأ^2 $+\beta$.نب^2 $+\gamma$ نجـ^2 $=(\alpha+\beta+\gamma)$ نهـ^2 $+\alpha$.هـأ^2 $-\beta$.هـب^2 $+\gamma$. هـجـ^2

لأن : α . $\overrightarrow{\text{هـأ}}$ $+\beta$. $\overrightarrow{\text{هـب}}$ $+\gamma$. $\overrightarrow{\text{هـجـ}}$ $=\vec{0}$

ومنـه المسـاواة : α نأ^2 $+\beta$.نب^2 $+\gamma$ نجـ^2 = ك تكـافـئ المسـاواة

$(\alpha+\beta+\gamma)$ نهـ^2 $+\alpha$.هـأ^2 $+\beta$.هـب^2 $+\gamma$. هـجـ^2 = ك

ومنـه : نهـ^2 $=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\Big($ك $-\alpha$.هـأ^2 $-\beta$.هـب^2 $+\gamma$. هـجـ$^2\Big)$ = ر

* إذا كـان ر <0 : مـج = $\varnothing$
* إذا كـان ر $=0$: مـج = {م}
* إذا كان ر >0 : مـج هي الكـرة ذات المـركـز م ونـصف القطـر $\sqrt{\text{ر}}$.

4 - تمارين التصحيح الذاتي :

4 - 1 - أ ، ب ، جـ ثلاث نقاط وَ هـ ، هـَ ، هـً مراكز المسافات المتناسبة للجمل أ (1) ، ب (2) ، جـ (3).

أ (2) ، ب (3) ، جـ (1)

أ (3) ، ب (1) ، جـ (2) على الترتيب

بين أن (أ ، ب ، جـ) وَ (هـ ، هـَ ، هـً) لهما نفس مركز الثقل.

4 - 2 - في مستو (π) منسوب إلى معلم متجانس $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$ لدينا النقاط الثلاث : أ (3 ، 4) ، ب (−1 ، +1) ، جـ (2 ، 0) والنقطة د المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{أد}=\overrightarrow{أب}+\overrightarrow{أجـ}$

1) بين أن د هو مركز المسافات المتناسبة للنقاط أ ، ب ، جـ وعين المعاملات المناسبة.

2) عين المعاملات α وَ β لكي تكون النقطةأَ، نظيرة أ بالنسبة إلى المبدأ م ، هي مركز المسافات المتناسبة للجملة :أ (α) وَ ب (β) ، جـ (1).

4 - 3 - أ وَ ب نقطتان متمايزتان من المستوي(π) وَك عدد حقيقي عين كلا من :

1 - مجموعة النقاط ن من المستوي(π) حيث :

2 - مجموعة النقاط ن من المستوي(π) حيث : $نأ^2 + نب^2 = ك$ $نأ^2 - نب^2 = ك$

ناقش حسب قيم العدد الحقيقي ك.

5 - الأجوبـة :

5 - 1 - لنبين أن مركز ثقل (هـ ، هَـ ، هًـ) هو مركز ثقل (أ ، ب ، جـ). لدينا

$$\overrightarrow{\text{هـأ}}+2\overrightarrow{\text{هـب}}+3\overrightarrow{\text{هـجـ}}=\vec{0}$$

$$2.\overrightarrow{\text{هَـأ}}+3\overrightarrow{\text{هَـب}}+\overrightarrow{\text{هَـجـ}}=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{\text{هًـأ}}+\overrightarrow{\text{هًـب}}+2\overrightarrow{\text{هًـجـ}}=\vec{0}$$

ليكن ω مركز ثقل المثلث أ ، ب ، جـ. لنفكك حدود العلاقات السابقة كما يلي :

$$\left(\overrightarrow{\text{هـ}\omega}+\overrightarrow{\omega\text{أ}}\right)+2\left(\overrightarrow{\text{هـ}\omega}+\overrightarrow{\omega\text{ب}}\right)+3\left(\overrightarrow{\text{هـ}\omega}+\overrightarrow{\omega\text{جـ}}\right)=\vec{0}$$

$$2\left(\overrightarrow{\text{هَـ}\omega}+\overrightarrow{\omega\text{أ}}\right)+3\left(\overrightarrow{\text{هَـ}\omega}+\overrightarrow{\omega\text{ب}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{هَـ}\omega}+\overrightarrow{\omega\text{جـ}}\right)=\vec{0}$$

$$3\left(\overrightarrow{\text{هًـ}\omega}+\overrightarrow{\omega\text{أ}}\right)+\left(\overrightarrow{\text{هًـ}\omega}+\overrightarrow{\omega\text{ب}}\right)+2\left(\overrightarrow{\text{هًـ}\omega}+\overrightarrow{\omega\text{جـ}}\right)=\vec{0}$$

أي : $6\overrightarrow{\text{هـ}\omega}+\overrightarrow{\omega\text{أ}}+2\overrightarrow{\omega\text{ب}}+3\overrightarrow{\omega\text{جـ}}=\vec{0}$

$$6\overrightarrow{\text{هَـ}\omega}+2\overrightarrow{\omega\text{أ}}+3\overrightarrow{\omega\text{ب}}+\overrightarrow{\omega\text{جـ}}=\vec{0}$$

$$6\overrightarrow{\text{هًـ}\omega}+3\overrightarrow{\omega\text{أ}}+\overrightarrow{\omega\text{ب}}+2\overrightarrow{\omega\text{جـ}}=\vec{0}$$

وبجمع المساويات الثلاث نتحصل على :

$$6\left(\overrightarrow{\text{هـ}\omega}+\overrightarrow{\text{هَـ}\omega}+\overrightarrow{\text{هًـ}\omega}\right)+6\left(\overrightarrow{\omega\text{أ}}+\overrightarrow{\omega\text{ب}}+\overrightarrow{\omega\text{جـ}}\right)=\vec{0}$$

لكن : $\overrightarrow{\omega\text{أ}}+\overrightarrow{\omega\text{ب}}+\overrightarrow{\omega\text{جـ}}=\vec{0}$ (من تعريف مركز الثقل)

إذن : $\overrightarrow{\text{هـ}\omega}+\overrightarrow{\text{هَـ}\omega}+\overrightarrow{\text{هًـ}\omega}=\vec{0}$ أي : $\overrightarrow{\omega\text{هـ}}+\overrightarrow{\omega\text{هَـ}}+\overrightarrow{\omega\text{هًـ}}=\vec{0}$

وهذا يعني أن ω هو مركز ثقل لِ (هـ ، هَـ ، هًـ).

5 - 2 -

1/ لدينا $\overrightarrow{\text{أد}}=\overrightarrow{\text{أب}}+\overrightarrow{\text{أجـ}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{أد}}=\overrightarrow{\text{أد}}+\overrightarrow{\text{دب}}+\overrightarrow{\text{أد}}+\overrightarrow{\text{دجـ}}$

$$\Leftrightarrow \vec{0}=\overrightarrow{\text{أد}}+\overrightarrow{\text{دب}}+\overrightarrow{\text{دجـ}}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{\text{دأ}}+\overrightarrow{\text{دب}}+\overrightarrow{\text{دجـ}}=\vec{0}$$

إذن د مركز المسافات المتناسبة للجملة أ (−1) ، ب (+1) ، جـ (+1).

2/ إحداثيا أ هما (−3 ، −4). (نظيرة أ بالنسبة إلى المبدأ م) تكون أ مركز للمسافات المتناسبة للجملة أ (α) ، ب (β) ، جـ (1).

إذا كان :
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma \neq 0 \\ -3 = \dfrac{\alpha(3)+\beta(-1)+1(2)}{\alpha+\beta+1} \\ -4 = \dfrac{\alpha(4)+\beta(+1)+1(0)}{\alpha+\beta+1} \end{cases}$$

أي :
$$\begin{cases} \alpha+\beta+1 \neq 0 \\ 3\alpha-\beta+3 = -3(\alpha+\beta+1) \\ 4\alpha+\beta = -4(\alpha+\beta+1) \end{cases}$$

أي :
$$\begin{cases} \alpha+\beta+1 \neq 0 \\ 6\alpha+2\beta = -6 \\ 8\alpha+5\beta = -4 \end{cases}$$

محّدد الجملة هو : $\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 14$. والحل الوحيد هو($\alpha$ ، β) حيث :

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}{14} = \frac{-22}{14} = -\frac{11}{7} \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$$

ولدينا $\alpha+\beta+1 = \dfrac{-11+12+7}{7} = \dfrac{8}{7}$. إذن $\alpha+\beta+1 \neq 0$

ومنه أ مركز المسافات المتناسبة للجملة : أ$\left(\dfrac{-11}{7}\right)$ ، ب$\left(\dfrac{12}{7}\right)$ ، جـ(1)

5 - 3 -

1/ ظهور النقطتين أ وَ ب الثابتتين في العبارة : ن أ^2+ن ب^2 ووجود نفس المعامل (+1) يؤدي بنا إلى إستعمال مركز ثقل النقطتين يعني منتصف القطعة [أ ب] وليكن ي.

لدينا : $\text{ن أ}^2 = \overrightarrow{\text{ن أ}}^2 = \left(\overrightarrow{\text{ن ي}} + \overrightarrow{\text{ي أ}}\right)^2$

$$\overrightarrow{\text{ن أ}}^2 = \text{ن ي}^2 + \text{ي أ}^2 + 2\,\overrightarrow{\text{ن ي}} . \overrightarrow{\text{ي أ}}$$

بنفس الطريقة : $\text{ن ب}^2 = \text{ن ي}^2 + \text{ي ب}^2 + 2\,\overrightarrow{\text{ن ي}} . \overrightarrow{\text{ي ب}}$

ومنه : $\text{ن أ}^2 + \text{ن ب}^2 = 2\,\text{ن ي}^2 + \text{ي أ}^2 + \text{ي ب}^2 + 2\,\overrightarrow{\text{ن ي}} . \left(\overrightarrow{\text{ي أ}} + \overrightarrow{\text{ي ب}}\right)$

ولكن $\overrightarrow{\text{ي أ}} + \overrightarrow{\text{ي ب}} = \vec{0}$ وَ $\text{ي ب}^2 = \text{ي أ}^2$ (لأن ي هي منتصف [أ ب]).

إذن : $\text{ن أ}^2 + \text{ن ب}^2 = 2\,\text{ن ي}^2 + 2\,\text{ي أ}^2$.

ومنه : $\text{ن أ}^2 + \text{ن ب}^2 = \text{ك} \Leftrightarrow 2\,\text{ن ي}^2 + 2\,\text{ي أ}^2 = \text{ك}$

$$\text{ن أ}^2 + \text{ن ب}^2 = \text{ك} \Leftrightarrow 2\,\text{ن ي}^2 = \text{ك} - 2\,\text{ي أ}^2$$

والعلاقة الأخيرة تكتب : $\text{ن ي}^2 = \dfrac{\text{ك} - 2\,\text{ي أ}^2}{2}$

المناقشة :

إذا كان : $\text{ك} - 2\,\text{ي أ}^2 \langle 0$: العلاقة مستحيلة ومجموعة النقط ن التي تحققها خالية

إذا كان : $\text{ك} - 2\,\text{ي أ}^2 = 0$: المجموعة تشمل نقطة وحيدة وهي "ي"

إذا كان : $\text{ك} - 2\,\text{ي أ}^2 \rangle 0$: المجموعة المجموعة هي دائرة مركزها ي ونصف قطرها : $\sqrt{\dfrac{\text{ك} - 2\,\text{ي أ}^2}{2}}$.

2/ البحث عن مجموعة النقاط التي تحقق : $\text{ن أ}^2 - \text{ن ب}^2 = \text{ك}$ لتكن مج هذه المجموعة.

دائما باستعمال المنتصف ي ونشر المربعين $\left(\overrightarrow{\text{ن ي}} + \overrightarrow{\text{ي أ}}\right)^2$ وَ $\left(\overrightarrow{\text{ن ي}} + \overrightarrow{\text{ي ب}}\right)^2$ نتحصل على:

$$\text{ن أ}^2 = \text{ن ي}^2 + \text{ي أ}^2 + 2\,\overrightarrow{\text{ن ي}} . \overrightarrow{\text{ي أ}}$$

$$\text{ن ب}^2 = \text{ن ي}^2 + \text{ي ب}^2 + 2\,\overrightarrow{\text{ن ي}} . \overrightarrow{\text{ي ب}}$$

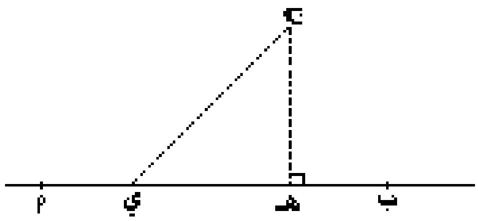
ومنه : $\text{نأ}^2 - \text{نب}^2 = \text{يأ}^2 - \text{يب}^2 + 2\,\overleftarrow{\text{ني}}.\left(\overleftarrow{\text{يأ}} - \overleftarrow{\text{يب}}\right)$

لكن $\text{يأ}^2 - \text{يب}^2 = 0$ وَ $\overleftarrow{\text{يأ}} - \overleftarrow{\text{يب}} = \overleftarrow{\text{يأ}} + \overleftarrow{\text{يأ}} = 2\,\overleftarrow{\text{يأ}}$

إذن : $\text{نأ}^2 - \text{نب}^2 = 2\,\overleftarrow{\text{ني}}.\left(2\,\overleftarrow{\text{يأ}}\right) = -4\left(\overleftarrow{\text{ين}}.\overleftarrow{\text{يأ}}\right)$

ونعلم أنه إذا كان هـ المسقط العمودي لِـ ن على (أ ب) فإن :

$\overleftarrow{\text{ين}}.\overleftarrow{\text{يأ}} = \overline{\text{يهـ}}.\overline{\text{يأ}}$



ومنه العلاقة :

$\text{نأ}^2 - \text{نب}^2 = \text{ك}$ تكافئها العلاقة

$-4\left(\overline{\text{يهـ}}.\overline{\text{يأ}}\right) = \text{ك}$

أي $\overline{\text{يهـ}} = \dfrac{\text{ك}}{-4\,\overline{\text{يأ}}} = \dfrac{\text{ك}}{4\,\overline{\text{أي}}}$

وبما أن ك وَ $\overline{\text{أي}}$ ثابتين فإن $\overline{\text{يهـ}}$ ثابت

ومنه :

هـ ثابتة، إذن النقطة ن تنتمي إلى المستقيم (Δ) الذي يعامد (أ ب) في النقطة هـ المعرفة بالعلاقة : $\overline{\text{يهـ}} = \dfrac{\text{ك}}{4\,\overline{\text{أي}}}$.

وبالعكس إذا كان ن∈ (Δ) فإن مسقطه العمودي على (أب) هو النقطة هـ (حسب تعريف (Δ)) التي تحقق : $\overline{\text{يهـ}} = \dfrac{\text{ك}}{4\,\overline{\text{أي}}}$ يعني العلاقة $-4\,\overline{\text{يهـ}}.\overline{\text{يأ}} = \text{ك}$.

لكن $-4\,\overline{\text{يهـ}}.\overline{\text{يأ}} = -4\,\overleftarrow{\text{ين}}.\overleftarrow{\text{يأ}} = \text{نأ}^2 - \text{نب}^2$. (إذن ن تنتمي إلى مج) ومنه مج = (Δ).

تمارين

I) لتكن المتتالية العددية $(ى_ن)$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} ى_0 = 1 \text{ ، } ى_1 = 3 \\ \forall ن \in ط : ى_{ن+2} = \frac{1}{2}\alpha^2 ى_{ن+1} + (3-\alpha) ى_ن \end{cases}$$

حيث $\alpha \in ح$.

ولتكن المتتالية $(ح_ن)$ المعرفة كما يلي :

$\forall ن \in ط : ح_ن = ى_{ن+1} - ى_ن$

* نضع $\alpha = 2$.

1) بين أن المتتالية $(ح_ن)$ ثابتة

2) استنتج أن المتتالية $(ى_ن)$ حسابية، حدد أساسها وحدها الأول.

3) أحسب $ى_ن$ بدلالة ن وكذلك $مج = ى_0 + ى_1 + ... + ى_ن$.

واستنتج مجموع الأعداد الطبيعية الفردية الأصغر من 100

*نعتبر الآن $\alpha = -4$

1) بين أن المتتالية $(ح_ن)$ هندسية، أكتب $ح_ن$ بدلالة ن.

2) أحسب المجموع $ل_ن = ح_0 + ح_1 + ... + ح_ن$

3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي ن يكون : $ل_ن = ى_{ن+1} - 1$

بين أن المتتالية $(ى_ن)$ متباعدة.

II) في المستوي (π) نعتبر التحويل النقطي ل المعرف كما يلي :

$$ل : ن\ (س، ع) \mapsto ن'\ (س' \text{ ، } ع') \ / \ \begin{cases} س' = 3س - 4ع + 8 \\ ع' = 4س + 3ع - 4 \end{cases}$$

1) عين التطبيق المركب تا المرفق بهذا التحويل.

2) ما هي طبيعة التحويل ل، حدد عناصره المميزة.

3) أوجد محولة المستقيم : ع = 0 (محور الفواصل) وفق التحويل ل.

□□) لتكن التحويلات النقطية المعرفة بالعبارات المركبة الآتية :

تا : ص ↦ تا (ص) = $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)$ص+2 ت.

ها : ص ↦ ها (ص) = ت ص−1 − ت.

عا : ص ↦ عا (ص) = $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)$ص −1.

1)عين التحويلين : عاo تا ، هاoتا

2) حدد طبيعة وعناصر التحويلات تا ، ها ، عاo تا

IV) ليكن التحويل ل$_{\alpha}$: ن(س ، ع) ↦ نَ(سَ، عَ) / $\begin{cases} سَ = \alpha ع - \alpha \\ عَ = س + 1 \end{cases}$

1) أثبت أن التحويل ل$_1$ تناظراً عمودياً حول مستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلته.

2) عين التحويل ل$_{\alpha}$ o ل$_1$ ثم استنتج أن ل$_{\alpha}$ هو مركب تحويليين بسيطين يطلب تحديدهما.

V) ليكن التحويل ل$_{ط}$ حيث : ص ↦ ل$_{ط}$(ص) = [ط+ت(ط^2−1)]ص+1

حيث ط وسيط حقيقي.

من أجل أي قيمة لِ ط يكون التحويل ل$_{ط}$:

1) انسحاباً

2) تحاكياً نسبته − 1.

3) دورانا ، عين عناصره المميزة

4) تشابهاً نسبته $\sqrt{3}$.

5) تشابهاً زاويته $\frac{\pi}{4}$

VI) في المستوي المنسوب لمعلم (م ، وَ ، يَ) متعامد ومتجانس. نعتبر الدوران ر$\left(م ، \frac{2\pi}{3}\right)$ أوجد محولة المنحنيات الآتية وفق الدوران ر.

1) (د) دائرة مركزها م ونصف قطرها نق.

2) (د) دائرة مركزها النقطة أ(3 ، 2) ونصف قطرها نق

3) (كـ) قطع معادلته : $\text{س}^2 - \text{ع}^2 + 4 = 0$

4) (Δ) مستقيم معادلته : $- 2\,\text{س} + 3\,\text{ع} + 5 = 0$

VII) لتكن الدالة العددية تا للمتغير الحقيقي س المعرفة كما يلي :

$$\text{تا}(\text{س}) = \begin{cases} \text{هـ}^{2\text{س}+2} + \text{س} + 1 & , \quad \text{س} \leq -1 \\ \text{س}^2 + 2\text{س} & , \quad -1 < \text{س} \leq 0 \\ \text{لو}\left|\dfrac{\text{س}+1}{\text{س}-1}\right| & , \quad \text{س} > 0 \end{cases}$$

1) عين في مجموعة التعريف الدالة تا وادرس استمرارها وقابلية اشتقاقها على ف.

2) أدرس تغيرات الدالة تا وارسم المنحني البياني الممثل لها في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس.

3) أحسب م (α) مساحة الحيز من المستوي المحدد بِ :

$$\left\{ (\text{س،ع}) \,/\, \alpha \leq \text{س} \leq -1 \ \text{و}\ \text{س} - 1 \leq \text{ع} \leq \text{تا}(\text{س}) \right\}$$

ما هي نهاية م(α) عندما $\alpha \to -\infty$ ؟

VIII) في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(\text{م}، \vec{\text{و}}، \vec{\text{ي}})$ نعتبر النقطة : أ (1، 5) ، ب (2 ،3) ، جـ (4 ، 4)

1) عين النقطة ث$_\alpha$ مركز المسافات المتناسبة للجملة : { (أ ، 5) ، (ب ، α +1) ، (جـ ، $-\alpha$ + 3) }. حيث α وسيط حقيقي

2) عين مجموعة النقاط ث$_\alpha$ عندما α يمسح كل ح

3) نضع α = 5 . عين مجموعة النقط ن التي تحقق :

$$\text{ن أ}^2 + 6\,\text{ن ب}^2 - 2\,\text{ن جـ}^2 = 25$$

IX) لتكن الدالة العددية تا لمتغير الحقيقي س المعرفة كما يلي : تا(س) = $\frac{(س-2)^2}{س^2-1}$. وليكن (كـ) المنحني البياني الممثل لها في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(م ، \vec{و} ، \vec{ي}\right)$.

1) أدرس تغيرات الدالة تا

2) عين نقاط تقاطع المنحني (كـ) مع المحورين ومع خط المقارب الأفقي

3) أعط معادلة المماس للمنحني (كـ) عند نقطة تقاطعه مع الخط المقارب.